С. Бюшгенсъ.

ТЕОРІЯ ОПРЕДѢЛИТЕЛЕЙ.

Курсъ лекцій, читанный въ Московскомъ Университетѣ въ 1913—17 годахъ.

ИЗДАНІЕ 2-е, ДОПОЛНЕННОЕ
„СТУДЕНЧЕСКАГО ИЗДАТЕЛЬСТВА“
Москва—1918.

ГЛАВА I.

Опредѣленіе детерминанта.

1. Опредѣлители 2-го порядка. Для разъясненія понятія о детерминантѣ разсмотримъ задачу исключенія неизвѣстныхъ изъ линейной системы, притомъ для начала возьмемъ ее въ наипростѣйшей формѣ.

Пусть у насъ имѣются два однородныхъ уравненія I-ой степени съ 2 неизвѣстными:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y&=0\\ a_2x+b_2y&=0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Эти уравненія удовлетворятся значеніями:

$$x=0, \qquad y=0,$$

они имѣютъ иное рѣшеніе, отличное отъ нуля для каждаго изъ неизвѣстныхъ, если между коэффиціентами этихъ уравненій существуетъ нѣкоторое соотношеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, опредѣляя изъ каждаго уравненія отношеніе неизвѣстныхъ и сравнивая ихъ, мы получимъ:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \qquad \text{или} \qquad a_1b_2-a_2b_1=0.$$

Вотъ это послѣднее выраженіе

$$a_1b_2-a_2b_1, \qquad (2)$$

равенство нулю котораго даетъ условіе совмѣстности уравненій (1)) и называется опредѣлителемъ или детерминантомъ 2-го порядка обозначается онъ такъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1. \qquad (3)$$

Количества a_1, b_1, a_2, b_2 называются элементами опредѣлиеля, они располагаются въ квадратной таблицѣ, причемъ горизонтальные ряды называютъ строками, вертикальные—столбцами; каждое изъ произведеній въ выраженіи (2) называютъ членомъ опредѣлителя, первый изъ нихъ a_1b_2—главнымъ членомъ.

Отмѣтимъ простѣйшія свойства нашего выраженія (2).

I. Опредѣлитель есть однородная линейная функція относительно элементовъ одного ряда (строки или столбца); поэтому, если мы всѣ элементы одного ряда умножимъ на какое-нибудь число k, весь опредѣлитель умножится на это число,—напримѣръ:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k(a_1b_2 - a_2b_1) = k.\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Такимъ образомъ общій множитель у элементовъ одного ряда мы можемъ выносить за знакъ опредѣлителя.

II. Опредѣлитель измѣнитъ свой знакъ, если переставить въ немъ два ряда.

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = b_1a_2 - b_2a_1 = -(a_1b_2 - a_2b_1) \text{ или}$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Двѣ перестановки не мѣняютъ значенія опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} = b_2a_1 - b_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

III. Опредѣлитель не мѣняетъ своего значенія, если къ элементамъ одного ряда прибавить соотвѣтственно величины, пропорціональныя элементамъ другого ряда.

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1, & b_1 \\ a_2 + kb_2, & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 + kb_1)\, b_2 - (a_2 + kb_2)\, b_1 = a_1b_2 - a_2b_1.$$

2: Опредѣлители 3-го порядка. Возьмемъ теперь три однородныхъ линейныхъ уравненія

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Умножимъ первое изъ нихъ на $b_2c_3 - b_3c_2$, второе на $b_3c_1 - b_1c_3$ и третье на $b_1c_2 - b_2c_1$, затѣмъ всѣ три уравненія сложимъ; коэффиціентъ при первомъ неизвѣстномъ x въ этой суммѣ будетъ слѣдующее выраженіе, которое мы обозначимъ черезъ Δ:

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \Delta. \qquad (5)$$

Что касается коэффиціентовъ при другихъ неизвѣстныхъ y и z, то они будутъ тождественно равняться нулю:

$$\begin{aligned} b_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_2(b_3c_1 - b_1c_3) + b_3(b_1c_2 - b_2c_1) &= 0 \\ c_1(b_2c_3 - b_3c_2) + c_2(b_3c_1 - b_1c_3) + c_3(b_1c_2 - b_2c_1) &= 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Результатъ сложенія уравненій (4) послѣ всего сказаннаго представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Delta \,.\, x = 0.$$

Такимъ образомъ, если система (4) допускаетъ рѣшенія, отличныя отъ нуля, коэффиціенты данныхъ уравненій должны удовлетворять условію $\Delta = 0$ или

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 = 0$$

Лѣвая часть этого условія, т.-е. выраженіе (5), составленное изъ девяти коэффиціентовъ уравненій (4), называется опредѣлителемъ 3-го порядка. Этотъ опредѣлитель обозначается такъ же, какъ и опредѣлитель 2-го порядка: элементы располагаются въ квадратной таблицѣ, заключенной между вертикальными чертами:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Опредѣлитель 3-го порядка имѣетъ тѣ же три свойства, которыя были указаны для опредѣлителя 2-го порядка.

Прежде всего выраженіе (5) относительно элементовъ любого ряда (строки или столбца) будетъ также линейнымъ однороднымъ; отсюда опять вытекаетъ возможность общаго множителя у элементовъ одного ряда выносить множителемъ за знакъ опредѣлителя, напримѣръ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & lb_1 & c_1 \\ ka_2 & lkb_2 & kc_2 \\ a_3 & lb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k. \begin{vmatrix} a_1 & lb_1 & c_1 \\ a_2 & lb_2 & c_2 \\ a_3 & lb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k.\ l. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Не трудно провѣрить далѣе, что перестановка двухъ рядовъ мѣняетъ знакъ опредѣлителя. Что касается третьяго, указаннаго выше свойства, то его можно обнаружить слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ выраженія, стоящія въ равенствѣ (5) въ скобкахъ соотвѣтственно черезъ A_1, A_2, A_3, тогда равенства (5) и (6) перепишутся такъ:

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = \Delta \qquad (5')$$

$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0$$
$$c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0 \qquad (6')$$

Лѣвыя части двухъ послѣднихъ равенствъ получаются изъ лѣвой части перваго, если мы въ ней вмѣсто элементовъ перваго столбца a_1, a_2, a_3 поставимъ элементы 2-го или 3-го столбца: b_1, b_2, b_3; или c_1, c_2, c_3; при такой замѣнѣ элементы двухъ столбцовъ опредѣлителя окажутся соотвѣтственно равными, а самый опредѣлитель, какъ показываютъ равенства (6′), тождественно равнымъ нулю. Итакъ опредѣлитель, въ которомъ имѣется два одинаковыхъ ряда, тождественно равенъ нулю. Послѣ сказаннаго не трудно обосновать свойство III; умножимъ первое изъ равенствъ (6′) на какое-нибудь число k, а второе на l и результаты сложимъ почленно съ равенствомъ (5′):

$$(a_1 + kb_1 + lc_1)A_1 + (a_2 + kb_2 + lc_2)A_2 + (a_3 + kb_3 + lc_3)A_3 = \Delta.$$

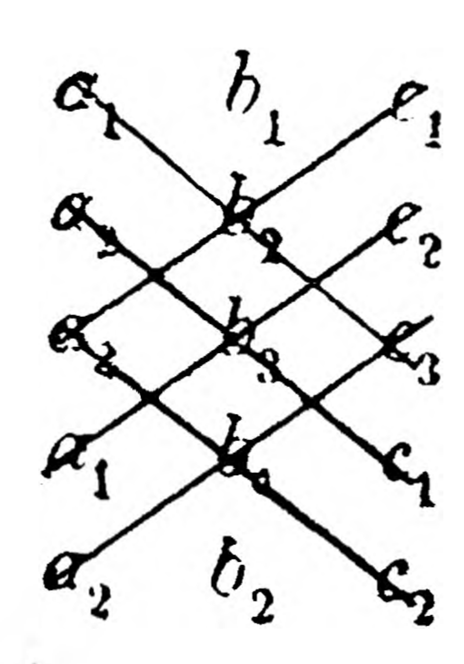
Лѣвая часть этого равенства есть, очевидно, нашъ начальный опре-

дѣлитель, въ которомъ только вмѣсто элементовъ перваго столбца стоятъ суммы, заключенныя въ скобки, и это выраженіе тождественно равно Δ, т.-е. начальному опредѣлителю. Итакъ, опредѣлитель не измѣняетъ своего значенія, если къ элементамъ перваго столбца прибавить соотвѣтственно величины, пропорціональныя элементамъ другихъ столбцовъ. Или при нашемъ обозначеніи:

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1+lc_1, & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2+lc_2, & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3+lc_3, & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Сказаннаго достаточно для первоначальнаго ознакомленія съ тѣми выраженіями, съ которыми мы далѣе постоянно будемъ имѣть дѣло. Всѣ обнаруженныя здѣсь нами свойства опредѣлителей 2-го и 3-го порядка, равно какъ и рядъ другихъ, остаются справедливыми и для опредѣлителей общихъ; чтобы избѣжать повтореній въ дальнѣйшемъ, не будемъ входить въ бо́льшія подробности.

Для разложенія опредѣлителя (7) 3-го порядка (и только 3-го!) существуетъ слѣдующее простое правило Sarrus'a: перепишемъ подъ опредѣлителемъ (7) двѣ первыя строки:



и возьмемъ три произведенія по діагонали и по параллелямъ къ ней слѣва направо со знакомъ плюсъ, затѣмъ три произведенія по діагонали справа налѣво и по параллелямъ, каждое изъ послѣднихъ произведеній со знакомъ минусъ, тогда алгебраическая сумма этихъ шести произведеній

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$

и будетъ опредѣлитель, т.-е. наше выраженіе (5).

До сихъ поръ подъ опредѣлителемъ мы подразумѣвали такое выраженіе, составленное изъ коэффиціентовъ данной линейной однородной системы уравненій, равенство нулю котораго являлось условіемъ совмѣстности этой системы. Однако эти выраженія встрѣчаются въ цѣломъ рядѣ и другихъ вопросовъ, отсюда возникаетъ необходимость опредѣлить ихъ самостоятельно, независимо отъ указанной нами задачи исключенія, а затѣмъ, конечно, подробно изучить ихъ свойства.

Вглядываясь внимательно въ выраженіе (5), мы можемъ легко описать его составъ. Не трудно замѣтить, что послѣдовательности номеровъ въ каждомъ членѣ опредѣлителя (123), (132), (231), (312), (321) представляютъ изъ себя всевозможныя размѣщенія изъ трехъ

элементовъ: 1, 2, 3. Каждая послѣдовательность можетъ быть получена изъ главной (начальной): (123) одной или нѣсколькими перестановками пары элементовъ. Такъ вторая послѣдовательность (132) получается изъ начальной (123) одной перестановкой пары (23); третья—(231) получается двумя перестановками: (213), (231); послѣдняя (321)—одной перестановкой пары (31).

Не трудно далѣе подмѣтить, что знаки отдѣльныхъ членовъ опредѣлителя (5) находятся въ соотвѣтствіи какъ разъ съ числомъ указанныхъ перестановокъ: если данное произведеніе получается изъ главнаго $a_1b_2c_3$ путемъ четнаго числа перестановокъ индексовъ (значковъ), то оно входитъ въ опредѣлитель со знакомъ плюсъ, если нечетнаго—со знакомъ минусъ. Вотъ то основаніе, на которомъ мы построимъ общее опредѣленіе детерминанта любого порядка, независимо отъ частной задачи исключенія, указанной выше.

3. Типы размѣщеній. Если изъ n номеровъ 1, 2, 3, 4 . . . n мы составимъ всевозможныя размѣщенія, то число ихъ, какъ извѣстно, будетъ равно

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n \text{ или } n!$$

Перестановку двухъ элементовъ въ какой-либо послѣдовательности будемъ называть транспозиціей. Очевидно, что каждое размѣщеніе номеровъ можетъ быть получено изъ начальнаго (1234 . . n) (или наоборотъ) нѣкоторымъ числомъ транспозицій, т.-е. рядомъ перестановокъ паръ номеровъ. Напримѣръ: размѣщеніе (53412) переходитъ въ начальное послѣ четырехъ транспозицій:

(53412), (13452), (12453), (12354), (12345),

здѣсь мы послѣдовательно переставляли слѣдующія пары:

(51), (32), (43), (54).

Будемъ называть размѣщеніе—размѣщеніемъ четнаго типа, если оно получается изъ начальнаго четнымъ числомъ транспозицій, и нечетнаго, если оно получается—нечетнымъ числомъ транспозицій. Начальное размѣщеніе причислимъ къ четному типу. Надо замѣтить, что какое-нибудь данное размѣщеніе можетъ быть получено изъ начальнаго различными способами, дающими разныя числа транспозицій, но эти числа будутъ всегда одного и того же характера: или всегда четными, или всегда нечетными независимо отъ способовъ перестановокъ. Очевидно, далѣе, что число размѣщеній четнаго типа одинаково съ числомъ размѣщеній нечетнаго типа, и, слѣдовательно, каждое изъ нихъ равно $\frac{1}{2} \cdot n!$.

4. Опредѣленіе детерминанта. Пусть теперь мы имѣемъ n^2 количествъ, расположенныхъ въ нѣкоторой квадратной таблицѣ:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & . & . & . & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & . & . & . & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & . & . & . & l_3 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n & d_n & . & . & . & l_n \end{matrix} \qquad (1)$$

въ этой таблицѣ имѣется n строкъ и n столбцовъ.

Возьмемъ произведеніе элементовъ по діагонали слѣва направо

$$a_1\, b_2\, c_3\, d_4 \ldots l_n. \qquad (2)$$

и будемъ всевозможными способами переставлять индсксы $1, 2, 3 \ldots n$, тогда получимъ всего $n!$ произведеній, составленныхъ изъ элементовъ нашей таблицы и подчиняющихся слѣдующему условію: въ каждое произведеніе изъ n элементовъ входитъ по одному элементу изъ каждой строки и изъ каждаго столбца. Каждому изъ этихъ произведеній придадимъ знакъ плюсъ, если размѣщеніе его индексовъ будетъ четнаго типа, и знакъ минусъ, если оно будетъ нечетнаго типа.

Алгебраическую сумму всѣхъ $n!$ произведеній (съ соотвѣтствующими знаками) назовемъ опредѣлителемъ порядка n. Обозначать этотъ опредѣлитель будемъ, располагая всѣ элементы въ указанной выше квадратной таблицѣ и заключая ее вертикальными чертами:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & . & . & . & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & . & . & . & l_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n & . & . & . & l_n \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1\, b_2\, c_3 \ldots l_n\,. \qquad (3)$$

Горизонтальные ряды элементовъ будемъ называть строками, вертикальные—столбцами. Каждое изъ произведеній, составляющихъ опредѣлитель, будемъ называть его членомъ, первое же, т. е. $a_1\, b_2\, c_3 \ldots l_n$ главнымъ членомъ. Теоретически выгоднѣе обозначать элементы одной буквой съ двумя значками, напримѣръ, черезъ a_{ik} такъ, чтобы первый значекъ отмѣчалъ номеръ строки, второй номеръ столбца, которымъ принадлежитъ этотъ элементъ. Такимъ образомъ, опредѣлитель при этихъ обозначеніяхъ напишется такъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn} \qquad (4)$$

Вь этомъ случаѣ для образованія опредѣлителя изъ главнаго члена надо составить всѣ размѣщенія изъ первыхъ индексовъ, оставляя вторые на своихъ мѣстахъ. Однако, чтобы избѣгнуть нѣкоторой

пестроты въ индексахъ, мы иногда будемъ пользоваться первымъ обозначенiемъ. Въ тѣхъ случаяхъ, когда не могутъ возникнуть недоразумѣнiя, мы будемъ пользоваться слѣдующими двумя сокращенными обозначенiями: или будемъ выписывать только первую строку опредѣлителя:

$$| a_1 \ b_1 \ c_1 \ . \ . \ l_1 |$$

или въ вертикальныхъ чертахъ будемъ писать двѣ строки только номеровъ, въ первой—строкъ опредѣлителя, во второй—столбцовъ, напримѣръ:

$$\left| \begin{matrix} 1 \ 2 \ 3 \ . \ . \ . \ i-1, i, i+1, . \ n \\ 1 \ 2 \ 3 \ . \ . \ k-1, k, k+1 . \ . \ . \ n \end{matrix} \right| .$$

Согласно нашему опредѣленiю детерминанта нѣтъ надобности для нахожденiя знака каждаго члена знать абсолютное число транспозицiй, помощью котораго этотъ членъ получается изъ главнаго, нужно знать только характеръ этого числа, т. е. будетъ ли оно четнымъ или нечетнымъ. Опредѣленiе числа транспозицiй для даннаго размѣщенiя все-таки довольно сложно, поэтому мы покажемъ другой способъ для опредѣленiя типа размѣщенiя, покажемъ, какъ находится нѣкоторое число того же характера, какъ и число транспозицiй.

5. Инверсiи. Пусть намъ дано нѣсколько вполнѣ отличныхъ другъ отъ друга элементовъ (буквъ или чиселъ) въ нѣкоторой вполнѣ опредѣленной послѣдовательности такъ, что относительно каждыхъ двухъ элементовъ всегда можно указать, какой изъ нихъ является предшествующимъ другому и какой послѣдующимъ въ этомъ первоначальномъ заданномъ расположенiи. Этотъ начальный заданный порядокъ элементовъ можемъ называть нормальнымъ. Простѣйшими примѣрами такихъ послѣдовательностей могутъ служить или рядъ чиселъ, расположенныхъ въ порядкѣ возрастанiя, или рядъ буквъ, расположенныхъ въ алфавитномъ порядкѣ. Если теперь при какомъ-либо другомъ произвольномъ размѣщенiи тѣхъ же элементовъ два любыхъ изъ нихъ расположены относительно другъ друга иначе чѣмъ въ нормальномъ размѣщенiи, то будемъ говорить, что здѣсь имѣетъ мѣсто нарушенiе порядка или инверсiя. При этомъ для насъ совершенно безразлично стоятъ ли эти элементы рядомъ или они отдѣлены другъ отъ друга нѣсколькими другими элементами. Для подсчета числа инверсiй даннаго размѣщенiя намъ придется, такимъ образомъ, пересмотрѣть относительное расположенiе въ

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

парахъ.

Возьмемъ для примѣра нормальный рядъ 1, 2, 3, 4; для 4 этихъ элементовъ возможны всего 24 перестановки, включая данную, слѣдовательно, каждая изъ 23 остальныхъ будетъ содержать нарушенiя даннаго нормальнаго порядка, т. е. будетъ содержать инверсiи.

Такъ послѣдовательность 3214 имѣетъ три инверсіи именно 32, 31, 21; послѣдовательность 4231 имѣетъ пять инверсій: 42, 43, 41, 21, 31.

Нетрудно видѣть, что наибольшее число инверсій получится въ томъ случаѣ, если каждый элементъ будетъ представлять инверсіи съ каждымъ изъ послѣдующихъ. Итакъ, наибольшее число инверсій для послѣдовательности изъ n элементовъ будетъ равно числу сочетаній изъ n по два:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Это число инверсій встрѣчается въ такомъ расположеніи, гдѣ всѣ элементы слѣдуютъ въ порядкѣ обратномъ нормальному, т. е. въ расположеніи (n, $n-1$, $n-2$, . . 2, 1).

6. **Зависимость между числомъ инверсій и транспозицій.** Установимъ теперь связь между числомъ транспозицій и числомъ инверсій для какой-либо перестановки. Докажемъ прежде всего, что одна транспозиція измѣняетъ число инверсій на нечетное число.

Предположимъ, что въ нѣкоторой послѣдовательности мы произведемъ одну транспозицію, именно переставляемъ элементы k и l; этими элементами всѣ остальные разбиваются на три группы. Обозначимъ группу элементовъ предшествующихъ k черезъ A, группу между k и l черезъ B и наконецъ группу элементовъ, слѣдующихъ за l черезъ C, тогда данное расположеніе будетъ $AkBlC$, послѣ же одной транспозиціи $AlBkC$. Посмотримъ же, какъ измѣнится число инверсій отъ этой одной транспозиціи.

Число инверсій элементовъ группы A какъ между собой, такъ и со всѣми остальными остается неизмѣннымъ, ибо съ одной стороны сама группа A не мѣняется, съ другой стороны тѣ элементы, которые слѣдовали за группой A, остаются послѣдующими относительно ея. Не мѣняется число инверсій группы (kBl) относительно элементовъ группы C; наконецъ остается неизмѣннымъ число инверсій элементовъ группы C. Итакъ измѣняется только число инверсій внутри группы (kBl). Пусть группа B содержитъ всего β элементовъ, изъ нихъ β_1 старшихъ k и β_2 старшихъ l. Тогда, предполагая, что k не дѣлаетъ инверсіи съ l, мы въ группѣ (kBl) будемъ имѣть число инверсій

въ группѣ B { число элементовъ младшихъ k: $\beta-\beta_1$
" " старшихъ l: β_2
всего $\beta-\beta_1+\beta_2$

послѣ же одной транспозиціи въ новой группѣ lBk число инверсій будетъ

въ группѣ B { число элементовъ младшихъ l: $\beta-\beta_2$
" " старшихъ k: β_1
(lk) даетъ еще одну инверсію 1
всего $\beta-\beta_2+\beta_1+1$ инверсій.

Разность этихъ двухъ чиселъ

$$(\beta - \beta_2 + \beta_1 + 1) - (\beta - \beta_1 + \beta_2) = 2(\beta_1 - \beta_2) + 1$$

и даетъ намъ то измѣненіе числа инверсій, которое внесено одной транспозиціей. Эта разность есть число нечетное. Если бы k и l стояли рядомъ, то слѣдовало бы принять

$$\beta = \beta_1 = \beta_2 = 0.$$

Итакъ, одна транспозиція мѣняетъ число иверсій на нечетное число, слѣдовательно, четному числу транспозицій соотвѣтствуетъ четное же число инверсій, нечетному числу транспозицій—нечетное число инверсій. Иначе говоря, число транспозицій въ какой-нибудь послѣдовательности элементовъ будетъ одинаковаго характера съ числомъ ея инверсій. Доказанная теорема позволяетъ намъ для опредѣленія знаковъ членовъ детерминанта пользоваться числомъ инверсій индексовъ. Будемъ обозначать число инверсій въ какой-нибудь послѣдовательности $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \lambda$ самой этой послѣдовательностью, заключая ее въ квадратныя скобки:

$$[\alpha \beta \gamma \delta \ldots \lambda].$$

Такимъ образомъ: $[4312] = 5$; $[513642] = 8$ и т. д.

7. Второе опредѣленіе детерминанта. Пользуясь этимъ обозначеніемъ, мы разложеніе опредѣлителя можемъ написать теперь въ видѣ слѣдующей суммы:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^{[i_1 i_2 i_3 \ldots i_n]} a_{i_1} b_{i_2} c_{i_3}, \ldots l_{i_n} \qquad (5)$$

Эта сумма распространяется на всѣ n! перестановки изъ номеровъ 1, 2, 3 . . n; послѣдовательность чиселъ $i_1 i_2 i_3 \ldots i_n$ изображаетъ одну изъ такихъ перестановокъ.

Слѣдуя укаазанному опредѣленію, развернемъ детерминантъ 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3d_4 - a_1b_2c_4d_3 + a_1b_4c_2d_3 - a_4b_1c_2d_3 -$$
$$- a_1b_3c_2d_4 + a_1b_3c_4d_2 - a_1b_4c_3d_2 + a_4b_1c_3d_2 +$$
$$+ a_3b_1c_2d_4 - a_3b_1c_4d_2 + a_3d_4c_1d_2 - a_4b_3c_1d_2 -$$
$$- a_2b_1c_3d_4 + a_2b_1c_4d_3 - a_2b_4c_1d_3 + a_4b_2c_1d_3 +$$
$$+ a_2b_3c_1d_4 - a_2b_3c_4d_1 + a_2b_4c_3d_1 - a_4b_2c_3d_1 -$$
$$- a_3b_2c_1d_4 + a_3b_2c_4d_1 - a_3b_4c_2d_1 + a_4b_3c_2d_1.$$

Пусть теперь у насъ элементы опредѣлителя обозначаются одной буквой съ двумя индексами (a_{ik}); тогда отдѣльный членъ опредѣлителя напишется въ слѣдующемъ видѣ:

$$(-1)^{[i_1 i_2 i_3 \,.\,.\, i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \,.\,.\,.\, a_{i_n n}$$

(первые значки суть номера строкъ, вторые столбцовъ) или

$$(-1)^{[i_1 i_2 i_3 \,.\,.\, i_n] + [1 2 3 \,.\,.\, n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \,.\,.\,.\, a_{i_n n} \qquad (6)$$

такъ какъ $[123 \,.\,.\, n] = 0$.

Это произведеніе алгебраически, разумѣется, не должно мѣняться, если мы переставимъ порядокъ множителей; посмотримъ, не окажетъ ли измѣненіе показателя вліяніе на знакъ произведенія. Легко обнаружить, что нѣтъ. Въ самомъ дѣлѣ, если мы переставимъ два какихъ-нибудь множителя въ произведеніи (6), то вмѣстѣ съ тѣмъ мы произведемъ по одной транспозиціи въ послѣдовательности, какъ номеровъ строкъ $i_1\ i_2\ i_3 \,.\,.\,.\, i_n$, такъ и номеровъ столбцевъ 1, 2, 3 . . . n. Каждая транспозиція измѣняетъ число инверсій на нечетное число, слѣдовательно сумма

$$[i_1 i_2 i_3 \,.\,.\, i_n] + [1, 2, 3. n]$$

измѣнится на четное число (на сумму или разность двухъ нечетныхъ чиселъ), т. е. ея характеръ въ отношеніи четности или нечетности остается прежнимъ.

Послѣ нѣсколькихъ транспозицій этотъ общій членъ (6) детерминанта приметъ видъ:

$$(-1)^{[p_1 p_2 p_3 \,.\,.\, p_n] + [q_1 q_2 q_3 \,.\,.\, q_n]} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} a_{p_3 q_3} \,.\,.\,.\, a_{p_n q_n} \qquad (7)$$

такимъ образомъ, мы одному изъ рядовъ индексовъ $p_1 p_2 p_3 \,.\,.\,.\, p_n$ (номера строкъ) или $q_1\ q_2 \,.\,.\,.\, q_n$ (номера столбцовъ) можемъ придать произвольное расположеніе, (во всѣхъ членахъ опредѣлителя одинаковое), въ другомъ же ряду производить перестановки, отличающія одинъ членъ опредѣлителя отъ прочихъ.

Принимая во вниманіе все сказанное, мы можемъ дать теперь иное опредѣленіе детерминанта. Составимъ изъ элементовъ квадратной таблицы (4) сумму всѣхъ возможныхъ произведеній вида (7), заботясь лишь о томъ, чтобы въ каждое произведеніе входило по одному элементу изъ каждой строки и изъ каждаго столбца. Сумма этихъ произведеній и будетъ опредѣлитель n-аго порядка.

Глава II.

Основныя свойства опредѣлителей.

1. Транспонированіе опредѣлителя. Докажемъ теперь основныя свойства опредѣлителей n-аго порядка.

I. Опредѣлитель не мѣняетъ своего значенія, если всѣ строки его сдѣлать столбцами и всѣ столбцы—строками.

Такая замѣна строкъ столбцами и столбцовъ строками называется транспонированіемъ опредѣлителя.

Это свойство непосредственно вытекаетъ изъ послѣднихъ замѣчаній, сдѣланныхъ въ предыдущей главѣ. Въ самомъ дѣлѣ, согласно нашему первоначальному опредѣленію детерминанта, мы для полученія всѣхъ его членовъ должны были въ главномъ членѣ $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ .\ .\ .\ a_{nn}$ дѣлать перестановки первыхъ индексовъ (индексовъ строкъ), оставляя послѣдовательность вторыхъ индексовъ неизмѣнной; если же мы замѣнимъ строки столбцами и столбцы строками, это будетъ равносильно перемѣнѣ ролей этихъ двухъ рядовъ индексовъ. Въ концѣ же предыдущаго параграфа мы видѣли, что такая перемѣна возможна; мы можемъ рядъ первыхъ индексовъ оставить неизмѣннымъ, перестановки же совершать во второмъ ряду.

Примѣръ: Опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_1, & b+ci, & d+ei \\ b-ci, & a_2, & g+hi \\ d-ei, & g-hi, & a_3 \end{vmatrix}$$

при дѣйствительныхъ a_1, a_2, a_3, b, c, d, e. g, h будетъ дѣйствительнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, замѣна i на $-i$ не мѣняетъ его значенія, ибо она равносильна замѣнѣ строкъ столбцами и столбцовъ строками.

2. Обращеніе въ нуль опредѣлителя. Такъ какъ всѣ члены опредѣлителя содержатъ множителемъ по одному элементу изъ каждаго даннаго ряда, то мы можемъ сказать:

II. Опредѣлитель равенъ нулю, если всѣ элементы одного какого-нибудь ряда суть нули.

3. Перестановка рядовъ въ опредѣлителя.

III. Опредѣлитель измѣнитъ свой знакъ на противоположный, если перестаеить въ немъ два ряда.

Пусть главный членъ даннаго опредѣлителя Δ будетъ:

$$a_{11}\ a_{22}\ .\ .\ a_{ii}\ .\ .\ .\ a_{kk}\ .\ .\ .\ a_{nn} \tag{1}$$

Если въ опредѣлителѣ переставить двѣ строки номеровъ i и k, тогда главный членъ новаго опредѣлителя Δ' будетъ:

$$a_{11}\ a_{22}\ .\ .\ a_{ki}\ .\ .\ .\ a_{ik}\ .\ .\ .\ a_{nn} \tag{2}$$

Произведенiе (1) входитъ во второй опредѣлитель со знакомъ минусъ, ибо оно получается изъ главнаго члена (2) одной транспозицiей. Равнымъ образомъ произведенiе (2) войдетъ въ первый опредѣлитель тоже съ противоположнымъ знакомъ. Пусть теперь у насъ будетъ какой-нибудь членъ опредѣлителя Δ:

$$(-1)^{|i_1 i_2 i_3\ .\ .\ i_n|}\ a_{i_1 1}\ a_{i_2 2}\ .\ .\ .\ a_{i_n n}, \tag{3}$$

который получается изъ главнаго (1) опредѣленнымъ числомъ p транспозицiй первыхъ индексовъ; чтобы этотъ же членъ получить изъ произведенiя (2), нужно одной транспозицiей больше, именно транспозицiей возвращающей (2) къ виду (1). Слѣдовательно, каждый членъ перваго опредѣлителя будетъ входить и во второй, но съ противоположнымъ знакомъ.

Слѣдствiе. Изъ этого предложенiя вытекаетъ:

IV. Если въ опредѣлителѣ имѣется два одинаковыхъ столбца или двѣ одинаковыхъ строки, то онъ равенъ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, отъ перестановки двухъ рядовъ опредѣлитель долженъ измѣнить знакъ:

$$\Delta' = -\Delta,$$

но, если эти ряды одинаковы, то онъ сохраняетъ свое значенiе $\Delta'=\Delta$, откуда $\Delta=0$.

Возьмемъ теперь опредѣлитель съ нормальнымъ расположенiемъ строкъ и столбцовъ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1\ 2\ 3\ .\ .\ .\ n \\ 1\ 2\ 3\ .\ .\ .\ n \end{vmatrix}$$

и измѣнимъ какъ угодно порядокъ строкъ и порядокъ столбцовъ. Пусть въ новомъ опредѣлителѣ послѣдовательность строкъ будетъ $i_1\ i_2\ i_3\ .\ .\ i_n$ и послѣдовательность столбцовъ $k_1\ k_2\ k_3\ .\ .\ k_n$, тогда самъ опредѣлитель изобразится такъ:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} i_1\ i_2\ i_3\ .\ .\ i_n \\ k_1\ k_2\ k_3\ .\ .\ k_n \end{vmatrix}$$

Послѣдовательность $i_1\, i_2\ .\ .\ i_n$ получается изъ нормальной $1\ 2\ 3\ .\ .\ n$ опредѣленнымъ числомъ p транспозицiй, послѣдовательность $k_1\, k_2\, .\, .\, k_n$ числомъ q транспозицiй, такимъ образомъ Δ_1 получится изъ Δ перемѣной знака $p+q$ разъ. Но мы уже доказали (гл. I, 6), что число транспозицiй p будетъ одноименно (въ отношенiи четности или нечетности) съ числомъ инверсiй $[i_1\ i_2\ .\ .\ i_n]$. точно также q одноименно съ числомъ инверсiй $[k_1\ k_2\ k_1\ .\ .\ k_n]$. Итакъ, сумму $p+q$

можемъ замѣнить суммой: $[i_1\ i_2\ .\ .\ i_n] + [k_1\ k_2\ .\ .\ k_n]$ и получимъ зависимость между нашими опредѣлителями въ слѣдующемъ видѣ

$$\begin{vmatrix} i_1\ i_2\ .\ .\ .\ i_n \\ k_1\ k_2\ .\ .\ .\ k_n \end{vmatrix} = (-1)^{|i_1 i_2\ .\ .\ i_n| + |k_1 k_2\ .\ .\ k_n|} \cdot \begin{vmatrix} 123\ .\ .\ n \\ 123\ .\ .\ n \end{vmatrix} \qquad (4).$$

4. Разложенiе опредѣлителя по элементамъ одного ряда. Такъ какъ въ каждый членъ опредѣлителя входятъ непремѣнно по одному элементу изъ одного и того же ряда, то опредѣлитель будетъ линейной однородной функцiей элементовъ выбраннаго ряда; въ группѣ членовъ, содержащихъ, напримѣръ, элементъ a_{11}, выносимъ его за скобку, выраженiе получаемое въ скобкѣ назовемъ A_{11}, тоже для элемента a_{21}—A_{21}, затѣмъ для a_{31},—A_{31} и т. д. для всѣхъ элементовъ перваго столбца. Тогда опредѣлитель Δ представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Delta = a_{11}\ A_{11} + a_{21}\ A_{21} + a_{31}\ A_{31} + \cdot\ \cdot\ \cdot + a_{n1}\ A_{n1}. \qquad (5)$$

Аналогично получимъ разложенiе по элементамъ любого столбца номера k:

$$\Delta = a_{1k}\ A_{1k} + a_{2k}\ A_{2k} + a_{3k} + A_{3k} + \ .\ .\ + a_{ik}\ A_{ik} + \ .\ .\ + a_{nk}\ A_{nk} \qquad (6)$$

или по элементамъ любой строки номера i

$$\Delta = a_{i1}\ A_{i1} + a_{i2} + a_{i3}\ A_{i3} + \ .\ .\ + a_{ik}\ A_{ik} + \ .\ .\ + a_{in}\ A_{ik} \qquad (7)$$

Въ разложенiяхъ (6) и (7) при одномъ и томъ же элементѣ a_{ik} мы ставимъ одинъ и тотъ множитель A_{ik}; вполнѣ понятно почему: въ опредѣлителѣ Δ группа членовъ, содержащихъ a_{ik}, будетъ одна и та же въ какомъ бы разложенiи не участвовалъ элементъ a_{ik} по элементамъ строки i или по элементамъ столбца k.

Этотъ множитель A_{ik} при a_{ik} въ разложенiи по элементамъ какого-либо ряда будемъ называть адъюнктой, соотвѣтствующей этому элементу, въ дальнѣйшемъ мы ближе опредѣлимъ его значенiе. Если въ опредѣлителѣ элементы столбца k замѣнить соотвѣтственно элементами какого-нибудь другого столбца номера h, то такой опредѣлитель, какъ было сказано, (свойство IV), равенъ нулю. Пользуясь разложенiемъ (6), мы можемъ написать въ этомъ случаѣ:

$$a_{1h}\ A_{1k} + a_{2h}\ A_{2k} + \ .\ .\ + a_{ih}\ A_{ik} + \ .\ .\ .\ + a_{nh}\ A_{nk} = 0; \qquad (8).$$

при $h \neq k$

равнымъ образомъ при замѣнѣ строки номера i какой-либо строкой номера j:

$$a_{j1}\ A_{i1} + a_{j2}\ A_{i2} + \ .\ .\ + a_{jk}\ A_{ik} + \ .\ .\ .\ + a_{jn}\ A_{in} = 0; \qquad (9).$$

при $j \neq i$.

V. Если элементы какого-нибудь ряда въ опредѣлителѣ умножить на какое-нибудь число l, то весь опредѣлитель умножится на это число l.

Это свойство вытекаетъ изъ предыдущаго замѣчанiя, что опредѣлитель есть линейная однородная функцiя элементовъ каждаго ряда, такимъ образомъ изъ разложенiя, напримѣръ, (6) слѣдуетъ:

$$(la_{1k})\ A_{1k}+(la_{2k})\ A_{2k}+\ .\ .+(la_{nk})\ A_{nk}=$$
$$=l\,[a_{1k}\ A_{1k}+a_{2k}\ A_{2k}+\ .\ .+a_{nk}\ A_{nk}]=l.\,\Delta.$$

5. Сумма опредѣлителей. Положимъ, что у насъ имѣется рядъ опредѣлителей, отличающихся между собою только элементами перваго столбца; для краткости обозначенія этихъ опредѣлителей будемъ выписывать только ихъ первыя строки:

$$\Delta_1=|\ a_1\ b_1\ c_1\ .\ .\ .\ l_1\ |\ ,\ \Delta_2=|\ \beta_1\ b_1\ c_1\ .\ .\ l_1\ |\ ,$$
$$\Delta_3=|\ \gamma_1\ b_1\ c_1\ .\ .\ l_1\ .\ .\ .\ .\ .$$

и составимъ новый опредѣлитель

$$\Delta=|\ a_1+\beta_1+\gamma_1+\ .\ .\ .\ ,\ b_1\ c_1\ .\ .\ l_1$$

Разложимъ послѣдній опредѣлитель по элементамъ перваго столбца:

$$\Delta=(a_1+\beta_1+\gamma_1+\ .\ .\ .\ )\ A_1+(a_2+\beta_2+\gamma_2+\ .\ .\ .\ )\ A_2+$$
$$+\ .\ .\ .+(a_n+\beta_n+\gamma_n+\ .\ .\ .\ )\ A_n \qquad (1\ ).$$

здѣсь $A_1,\ A_2\ .\ .\ .\ A_n$ будутъ адъюнкты элементовъ перваго столбца любого изъ нашихъ опредѣлителей, ибо эти адъюнкты не зависятъ отъ элементовъ перваго столбца. но зависятъ отъ остальныхъ столбцовъ, которые тождественны во всѣхъ данныхъ опредѣлителяхъ.

Перегруппировавъ члены въ правой части равенства (10), мы получимъ:

$$\Delta=(a_1\ A_1+a_2\ A_2+\ .\ .\ .+a_n\ A_n)+$$
$$+(\beta_1\ A_1+\beta_2\ A_2+\ .\ .\ .+\beta_n\ A_n)+$$
$$+(\gamma_1\ A_1+\gamma_2\ A_2+\ .\ .\ .+\gamma_n\ A_n)+$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

или

$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\ .\ .\ .$$

Итакъ: сумма опредѣлителей отличающихся между собой элементами только одного какого-нибудь столбца, есть новый опредѣлитель у котораго въ отмѣченномъ столбцѣ стоятъ суммы соотвѣтствующихъ элементовъ (этого столбца) данныхъ опредѣлителей, другіе же столбцы остаются тѣ же, какъ и въ данныхъ опредѣлителяхъ.

Пользуясь этимъ предложеніемъ, мы можемъ складывать опредѣлители, отличающіеся между собой только однимъ рядомъ, или наоборотъ раскладывать данный опредѣлитель въ сумму опредѣлителей.

Пусть у насъ имѣется опредѣлитель, у котораго выпишемъ только первую строчку, остальныя будутъ получаться изъ нея по какому-нибудь опредѣленному закону.

$$\Delta=|\ a_1+a_2+\ .\ .\ .+a_{i_1},\ s_2.\ s_3\ .\ .\ .\ s_n\ |\ ,$$

его можемъ разложить въ сумму опредѣлителей:

$$\Delta=|\ a_1\ s_2\ s_3\ .\ .\ s_n\,|+|\ a_2\ s_2\ s_3\ .\ .\ s_n\,|+|\ .\ .\ .+$$
$$+|\ a_{i_1}\ s_2\ s_3\ .\ .\ .\ s_n\ |\ .$$

Положимъ далѣе, что $s_2 = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{i_2}$, тогда каждый изъ предыдущихъ опредѣлителей—слагаемыхъ опять разложимъ въ сумму:

$$\Delta = | a_1\ b_1\ s_3 \ldots s_n | + | a_1\ b_2\ s_3 \ldots s_n | + \ldots + | a_1\ b_{i_2}\ s_3 \ldots s_n | +$$
$$+ | a_2\ b_1\ s_3 \ldots s_n | + | a_2\ b_2\ s_3 \ldots s_n | + \ldots + | a_2\ b_{i_2}\ s_3 \ldots s_n | +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ | a_{i_1}\ b_1\ s_3 \ldots s_n | + | a_{i_1} b_2\ s_3 \ldots s_n | + \ldots + | a_{i_1}\ b_{i_2}\ s_3 \ldots s_n |$$

въ этихъ опредѣлителяхъ столбцы начиная съ 3-го и кончая послѣднимъ одинаковы, что касается первыхъ двухъ, то они представляютъ всѣ комбинаціи каждаго a_k съ каждымъ b_h. Число всѣхъ опредѣлителей въ правой части будетъ $i_1 . i_2$.

Переходя къ самому общему случаю, примемъ, что

$$s_3 = c_1 + c_2 + c_3 \ldots + c_{i_3},$$
$$s_4 = d_1 + d_2 + \ldots + d_{i_4}, \ldots s_n = l_1 + l_2 + \ldots + l_{i_n},$$

тогда очевидно, что опредѣлитель Δ разложится въ сумму опредѣлителей вида;

$$| a_{k_1}\ b_{k_2}\ c_{k_3} \ldots l_{k_n} |,$$

гдѣ k_1 равно одному изъ чиселъ $1, 2, 3 \ldots i_1$
k_2 „ „ „ „ $1, 2, 3 \ldots i_2$
. . . .
k_n „ „ „ „ $1, 2, 3 \ldots i_n$.

Число этихъ опредѣлителей равно $i_1\ i_2\ i_3 \ldots i_n$, т. е. числу возможныхъ комбинацій для чиселъ $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$.

Возьмемъ наше первоначальное, простѣйшее разложеніе

$$| \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \ldots, b_1\ c_1\ d_1 \ldots l_1 | = | a_1\ b_1\ c_1 \ldots l_1 | +$$
$$+ | \beta_1\ b_1\ c_1 \ldots l_1 | + | \gamma_1\ b_1\ c_1 \ldots l_1 | + \ldots$$

и положимъ въ немъ:

$$\alpha_i = a_i,\ \beta_i = k_2 b_i,\ \gamma_i = k_3 c_i,\ \delta_i = k_4 d_i \text{ и т. д.}$$

тогда получимъ

$$| a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1 + k_4 d_1 + \ldots, b_1 . c_1 \ldots l_1 | =$$
$$= | a_1\ b_1\ c_1 \ldots l_1 | + k_1 | b_1\ b_1\ c_1\ d_1 \ldots l_1 | +$$
$$+ k_3 | c_1\ b_1\ c_1 \ldots l_1 | + k_2 | b_1\ d_1\ c_1\ d_1 \ldots l_1 | + \ldots$$

въ правой части всѣ опредѣлители, кромѣ перваго, суть нули; такимъ образомъ:

$$| a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1 + k_4 d_1 + \ldots, b_1 . c_1 \ldots l_1 | =$$
$$= | a_1\ b_1\ c_1 \ldots l_1 |.$$

Итакъ, мы можемъ сказать:

VI. Значенiе опредѣлителя не измѣнится, если къ элементамъ какого-нибудь столбца (или строки) прибавить величины соотвѣтственно пропорцiональныя элементамъ другихъ столбцовъ (строкъ).

Указанными свойствами опредѣлителя можно пользоваться съ цѣлью упростить его вычисленiе. Вынося за знакъ опредѣлителя общаго множителя элементовъ опредѣленнаго ряда, прибавляя или вычитая изъ элементовъ одного ряда величины соотвѣтственно пропорцiональныя элементамъ другихъ рядовъ, мы можемъ элементы опредѣлителя уменьшать по абсолютной величинѣ и нѣкоторые изъ нихъ даже обратить въ нули. Дальнѣйшiя упрощенiя опираются на иные принципы, которые будутъ указаны ниже.

Примѣръ 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 13 \\ 6 & 9 & 13 & 18 \\ 9 & 13 & 18 & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Примѣръ 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d+a+b \\ 1 & b & c & d+a+b+c \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & b+c+d+a \end{vmatrix} = 0,$$

здѣсь мы къ элементамъ 4-го столбца даннаго опредѣлителя прибавили соотвѣтственно элементы 2-го и 3-го столбца; въ полученномъ опредѣлителѣ элементы 4-го столбца оказались пропорцiональными элементамъ 1-го столбца, слѣдовательно, опредѣлитель равенъ нулю.

Примѣръ 3. Разсмотримъ такъ называемый степенной опредѣлитель или опредѣлитель Вандермонда:

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ 1 & x_n^2 & x_n \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Этотъ опредѣлитель есть цѣлая однородная функцiя отъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ степени равной

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Каждый разъ какъ два какихъ либо перемѣнныхъ x_p и x_q становятся равными, опредѣлитель обращается въ нуль, ибо въ немъ двѣ строки дѣлаются одинаковыми. Отсюда слѣдуетъ, что функцiя W_n дѣлится на каждую изъ разностей $x_p - x_q$, а слѣдовательно, и на произведенiе всѣхъ различныхъ такихъ разностей, которое для сокращенiя обозначимъ черезъ:

$$P\,(x_p - x_q).$$

Число множителей, входящихъ въ это произведенiе равно $C_n^2 = \frac{n\,(n-1)}{2}$ т. е. какъ разъ степени функцiи W; а потому послѣдняя можетъ отличаться отъ указаннаго произведенiя лишь постояннымъ множителемъ, который легко опредѣлить сравненiемъ подобныхъ членовъ въ функцiяхъ W и P.

Такимъ образомъ найдемъ окончательно:

$$W = P(x_p - x_q),\ p > q$$
$$p;\ q = 1.2, 3, \ldots n.$$

Въ частности:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1{}^2 \\ 1 & x_2 & x_2{}^2 \\ 1 & x_3 & x_3{}^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)\,(x_3 - x_1)\,(x_3 - x_2).$$

ГЛАВА III.

Адъюнкты и миноры.

1. Адъюнкты и миноры 1-го порядка. Мы показали, что опредѣлитель можетъ быть разложенъ по элементамъ какого-нибудь ряда въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Delta = \Sigma\ a_{ik}\ A_{ik}\ ,$$

суммированiе въ первой части производится по индексу i отъ 1 до n, если разложенiе берется по элементамъ столбца номера k, или по индексу k отъ 1 до n, если желаемъ получить разложенiе по элементамъ строки номера i. Въ этомъ параграфѣ мы разъяснимъ значенiе множителей A_{ik} (адъюнктъ).

Назовемъ миноромъ 1-го порядка M_{ik}, соотвѣтствующимъ элементу a_{ik}, тотъ опредѣлитель, который получается изъ даннаго вычеркиванiемъ i-ой строки и k-аго столбца. Этотъ миноръ M_{ik} будетъ опредѣлителемъ порядка $n-1$. *) Иначе его называютъ подопредѣлителемъ или субдетерминантомъ. Установимъ теперь его связь съ адъюнктой A_{ik}.

Въ разложенiи опредѣлителя по элементамъ первой строки

$$a_{11}\ A_{11} + a_{12}\ A_{12} + a_{13}\ A_{13} + \ldots\ldots + a_{1n}\ A_{1n} = \Delta$$

произведенiе $a_{11}.\ A_{11}$ даетъ совокупность членовъ опредѣлителя,

*) Условимся въ дальнѣйшемъ M_{ik} называть «миноромъ 1-го порядка», когда желаемъ отмѣтить его отношенiе къ элементу a_{ik}, и «подопредѣлителемъ порядка $n-1$», когда желаемъ подчеркнуть его порядокъ, какъ опредѣлителя.

2*

содержащихъ элементъ a_{11}. Очевидно, что эта группа членовъ получится изъ діагональнаго произведенія

$$(-1)^{[123\,.\,.\,n]}\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, .\ .\ .\ .\ a_{nn},$$

если мы будемъ переставлять всячески всѣ первые индексы кромѣ индекса 1. Эти перестановки показываютъ намъ, что адъюнкта A_{11} есть ни что иное, какъ опредѣлитель, составленный изъ всѣхъ элементовъ даннаго, кромѣ элементовъ первой строки и элементовъ перваго столбца. Иначе говоря, адъюнкта A_{11} есть ничто иное, какъ миноръ M_{11}, но это справедливо только для элемента a_{11}, стоящаго въ первой строкѣ и первомъ столбцѣ.

Поставимъ теперь въ данномъ опредѣлителѣ строку номера i и столбецъ номера k на первыя мѣста, сохраняя порядокъ остальныхъ строкъ и столбцовъ; въ такомъ случаѣ [гл. II, (4)]:

$$\begin{vmatrix} i, & 1, & 2, & .\ .\ .\ i-1, & i+1, & .\ .\ n \\ k, & 1, & 2, & .\ .\ k-1, & k+1. & .\ .\ n \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^{[i,1,2\,.\,.\,i-1,\ i+1,\,.\,.\,n]+[k,1,2\,.\,.\,k-1,\ k+1\,.\,.\,.\,n]} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & .\ .\ .\ i & .\ .\ n \\ 1 & 2 & 3 & .\ .\ .\ k & n \end{vmatrix}$$

или

$$\Delta'=(-)^{i+k}\,.\,\Delta \qquad (1)$$

Адъюнктой элемента a_{ik}, стоящаго въ опредѣлителѣ Δ' на первомъ мѣстѣ, будетъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 1, 2, 3\ .\ .\ .\ .\ i-1, & i+1, & .\ .\ n \\ 1, 2, 3\ .\ .\ .\ k-1, & k+1 & .\ .\ .\ n \end{vmatrix} \qquad (2)$$

т. е. M_{ik}. Такимъ образомъ группа членовъ въ Δ', содержащихъ элементъ a_{ik}, будетъ $a_{ik}\,.\,M_{ik}$, а въ опредѣлителѣ Δ это будетъ $a_{ik}\,.\,A_{ik}$, откуда на основаніи соотношенія (1) получимъ

$$M_{ik}=(-1)^{i+k}\,A_{ik} \quad \text{или наоборотъ}$$

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\,M_{ik} \qquad (3)$$

Это равенство устанавливаетъ весьма важную связь между адъюнктой A_{ik} и миноромъ M_{ik}, соотвѣтствующими одному и тому же элементу опредѣлителя a_{ik}.

Такимъ образомъ разложеніе опредѣлителя по элементамъ строки i или столбца k представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, A_{ik} = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, M_{ik} \qquad (4)$$

или

$$\Delta = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ik}\, A_{ik} = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, M_{ik}. \qquad (5)$$

Найденное значенiе адъюнкты позволяетъ понизить порядокъ опредѣлителя, если всѣ элементы какого-нибудь ряда, кромѣ одного, суть нули. Очевидно, въ этомъ случаѣ опредѣлитель равенъ произведенiю элемента, отличнаго отъ нуля, на соотвѣтствующую ему адъюнкту, т. е. миноръ, взятый съ надлежащимъ знакомъ (опредѣлитель порядка $n-1$). Примѣняя послѣдовательно это замѣчанiе, мы можемъ сказать: опредѣлитель, у котораго всѣ элементы по одну сторону отъ дiагонали суть нули, равенъ произведенiю элементовъ, расположенныхъ по дiагонали:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & c_3 & 0 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \begin{vmatrix} c_3 & 0 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4.$$

Примѣръ 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4. \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4.\,-2.(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -16.$$

Примѣръ 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ba+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ca+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+da+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ba+a^2 \\ 0 & c-b & c^2-b^2+a(c-b) \\ 0 & d-b & d^2-b^2+a(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & c+b+a \\ 1 & d+b+a \end{vmatrix} =$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Примѣръ 3. Развернемъ опредѣлитель:

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x \end{vmatrix}$$

Разложивъ его по элементамъ перваго столбца, найдемъ:

$$f(x) = a_0\, x^n + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

примѣняя указанный прiемъ нѣсколько разъ, окончательно получимъ:

$$f(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\, x + a_n.$$

2. Миноръ въ круговомъ порядкѣ. Переставимъ въ минорѣ

$$M_{ik} = \begin{vmatrix} 1, 2, 3 \ldots i-1, i+1, \ldots n \\ 1, 2, 3 \ldots k-1, k+1, \ldots n \end{vmatrix}$$

строки и столбцы такъ, чтобы сначала шли тѣ изъ нихъ, которые слѣдуютъ въ начальномъ за пропущенной строкой или столбцомъ, а потомъ тѣ, которые стояли до пропущенной строки или столбца. Будемъ называть миноръ съ такимъ расположенiемъ рядовъ— миноромъ съ круговымъ порядкомъ строкъ и столбцовъ и обозначимъ его черезъ M'_{ik} такъ что:

$$M'_{ik} = \begin{vmatrix} i+1, & i+2, \ldots n, 1, 2, \ldots i-1 \\ k+1, & k+2, \ldots n, 1, 2, \ldots k-1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

На основанiи соотношенiя (4) гл. II-й:

$$M'_{ik} = (-1)^{[i+1, i+2, \ldots n, 1, 2, \ldots i-1] + [k+1, k+2, \ldots n, 1, 2, \ldots k-1]} M_{ik} \tag{7}$$

Въ ряду $i+1, i+2, \ldots n, 1, 2, \ldots i-1$ каждое изъ $n-i$ первыхъ чиселъ составляетъ инверсiю съ $i-1$ послѣдними числами, такимъ образомъ

$$[i+1, i+2, \ldots n, 1, 2, \ldots i-1] + [k+1, k+2, \ldots n, 1, 2, \ldots k-1] = \\ = (n-i)(i-1) + (n-k)(k-1) \tag{8}$$

Правую часть предыдущаго равенства легко представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$n\,(i+k) - 2n + 2ik - (i+k)(i+k-1) \tag{8'}$$

произведенiе двухъ цѣлыхъ послѣдовательныхъ чиселъ:

$$(i+k)(i+k-1)$$

будетъ непремѣнно четнымъ числомъ, ибо одинъ изъ множителей будетъ четнымъ. Такимъ образомъ, отбрасывая въ выраженiи (8′) всѣ четныя слагаемыя, мы соотношенiе (7) представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$M'_{ik} = (-1)^{n(i+k)} M_{ik} \tag{9}$$

Взодя этотъ миноръ съ круговымъ порядкомъ рядовъ въ разложеніе опредѣлителя (4) по элементамъ строки или столбца, найдемъ:

$$\Delta = \Sigma(-1)^{(n+1)(i+k)} a_{ik} \; M'_{ik} \tag{10}$$

Отсюда слѣдуетъ, что, если данный опредѣлитель будетъ нечетнаго порядка, ($n+1$ будетъ четнымъ числомъ), то онъ равенъ прямо суммѣ произведеній элементовъ ряда на соотвѣтствующіе миноры въ круговомъ порядкѣ, т. е. каждое произведеніе берется со знакомъ плюсъ.

Напримѣръ, опредѣлитель 5-го порядка по элементамъ 3-й строки разложится такъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \\ b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \end{vmatrix} + b_3 \cdot \begin{vmatrix} c_4 & d_4 & e_4 & a_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 & a_5 \\ c_1 & d_1 & e_1 & a_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & a_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ c_3 \cdot \begin{vmatrix} d_4 & e_4 & a_4 & b_4 \\ d_5 & e_5 & a_5 & b_5 \\ d_1 & e_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & e_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} + d_3 \cdot \begin{vmatrix} e_4 & a_4 & b_4 & c_4 \\ e_5 & a_5 & b_5 & c_5 \\ e_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + e_3 \cdot \begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

Примѣръ 2.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & a & 0 \\ 1 & b & 1 & c & d \\ 0 & e & 0 & f & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & g & -1 & h & i \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} i & 1 & g & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ d & 1 & h & 1 \\ 2 & 0 & c & 0 \end{vmatrix} = -4. \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & i & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -8. \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -16.$$

3. Адъюнкты и миноры второго порядка. Возьмемъ разложеніе опредѣлителя $\Delta = | a_{ik} |$ по элементамъ какой-нибудь строки номера i_1:

$$\Delta = a_{i_1 1} A_{i_1 1} + a_{i_1 2} A_{i_1 2} + \ldots + a_{i_1 n} A_{i_1 n}. \tag{11}$$

Какъ было доказано въ предыдущемъ параграфѣ, каждая изъ адъюнктъ $A_{i_1 k}$ равна (взятому съ надлежащимъ знакомъ) минору $M_{i_1 k}$, послѣдній же является опредѣлителемъ n—1-го порядка, слѣдовательно, онъ будетъ линейной однородной функціей элементовъ какой-нибудь другой строки i_2 (кромѣ элемента $a_{i_2 k}$, какъ принадлежащаго вычеркнутому столбцу). Такимъ образомъ опредѣлитель Δ будетъ однородной функціей 2-го измѣренія относительно элементовъ двухъ выбранныхъ строкъ i_1 и i_2; въ этой функціи коэффиціентъ

при произведенiи $a_{i_1 k_1}$ $a_{i_2 k_2}$ будемъ называть адъюнктой 2-го порядка и обозначать черезъ $A_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}}$. Такъ что по элементамъ двухъ строкъ разложенiе опредѣлителя представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Delta = \sum_{k_1 k_2} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} A_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}} \tag{12}$$

Равнымъ образомъ будемъ называть миноромъ 2-го порядка и обозначать черезъ $M_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}}$ тотъ опредѣлитель, который получается изъ даннаго вычеркиванiемъ двухъ строкъ съ номерами i_1, i_2 и двухъ столбцовъ съ номерами k_1, k_2. Найдемъ теперь связь между адъюнктой 2-го порядка $A_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}}$ и соотвѣтствующимъ ей миноромъ $M_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}}$. Въ разложенiи опредѣлителя по элементамъ двухъ первыхъ строкъ произведенiе a_{11} a_{22} A_{12} даетъ совокупность членовъ опредѣлителя, содержащихъ два элемента a_{11} и a_{22}. Эта группа членовъ получится изъ дiагональнаго произведенiя

$$(-1)^{[1\ 2\ 3\ .\ .\ n]} a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ .\ .\ a_{nn},$$

если мы всевозможными способами будемъ переставлять индексы строкъ, кромѣ индексовъ 1 и 2. Эти перестановки показываютъ намъ, что адъюнкта $A_{\substack{12 \\ 12}}$ есть опредѣлитель, составленный изъ всѣхъ элементовъ даннаго, кромѣ элементовъ, принадлежащихъ двумъ первымъ строкамъ и двумъ первымъ столбцамъ. Другими словами, эта адъюнкта $A_{\substack{12 \\ 12}}$ есть миноръ $M_{\substack{12 \\ 12}}$, итакъ:

$$A_{\substack{12 \\ 12}} = M_{\substack{12 \\ 12}}. \tag{13}$$

Чтобы получить теперь выраженiе для любой адъюнкты $A_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}}$ поставимъ въ опредѣлителѣ Δ строки i_1, i_2 и столбцы k_1, k_2 на первыя мѣста, тогда:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} i_1\ i_2\ 1\ 2\ .\ .\ n \\ k_1\ k_2\ 1\ 2\ .\ .\ n \end{vmatrix} = (-1)^{\lambda} . \Delta, \tag{14}$$

гдѣ λ опредѣляется слѣдующимъ равенствомъ [гл. II, (4)]:

$$\lambda = [i_1\ i_2\ 1\ 2\ .\ .\ n] + [k_1\ k_2\ 1\ 2\ .\ .\ n]. \tag{15}$$

Въ опредѣлителѣ Δ' группа членовъ, содержащихъ произведенiе элементовъ $a_{i_1 k_1}$ и $a_{i_2 k_2}$ будетъ на основанiи (13):

$$a_{i_1 k_1}\ a_{i_2 k_2} .\ M_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}};$$

въ нашемъ же первоначальномъ опредѣлителѣ Δ эта группа будетъ

$$a_{i_1 k_1}\ a_{i_2 k_2} .\ A_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}},$$

откуда слѣдуетъ на основанiи соотношенія (14):

$$M_{\substack{i_1 i_2\\ k_1 k_2}} = (-1)^{\lambda} A_{\substack{i_1 i_2\\ k_1 k_2}} \quad \text{или наоборотъ}$$

$$A_{\substack{i_1 i_2\\ k_1 k_2}} = (-1)^{\lambda} M_{\substack{i_1 i_2\\ k_1 k_2}} \tag{16}$$

4. Адъюнкты и миноры высшихъ порядковъ. Выберемъ p опредѣленныхъ строкъ съ номерами $i_1, i_2, i_3, \ldots i_p$, тогда опредѣлитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1\,2\,3 \,.\,.\, n \\ 1\,2\,3 \,.\,.\, n \end{vmatrix}$ будетъ относительно элементовъ этихъ строкъ однородной функціей измѣренія p, коэффиціентъ въ этой функціи при произведеніи

$$a_{i_1 k_1} \; a_{i_2 k_2} \; a_{i_3 k_3} \; \ldots \; a_{i_p k_p} \tag{17}$$

будемъ обозначать черезъ

$$A_{\substack{i_1 i_2 \,.\,.\, i_p\\ k_1 k_2 \,.\,.\, k_p}} \tag{18}$$

и назовемъ его адъюнктой порядка p, соотвѣтствующей элементамъ (17).

Назовемъ далѣе миноромъ порядка p тотъ опредѣлитель, который получается изъ даннаго вычеркиваніемъ какихъ-нибудь p строкъ: $i_1, i_2, i_3, \ldots i_p$ и какихъ-либо p столбцовъ $k_1, k_2, k_3, \ldots k_p$, будемъ этотъ миноръ обозначать черезъ

$$M_{\substack{i_1 i_2 i_3 \,.\,.\, i_p\\ k_1 k_2 k_3 \,.\,.\, k_p}} \tag{19}$$

Мы предполагаемъ, что въ этомъ опредѣлителѣ (19) оставшіеся столбцы и строки расположены въ томъ же нормальномъ порядкѣ, какъ и въ данномъ опредѣлителѣ Δ.

Разсужденіемъ подобно предыдущему (для адъюнкты 2-го порядка) нетрудно найти, что адъюнкты и соотвѣтствующіе имъ миноры любого порядка p связываются слѣдующимъ соотношеніемъ:

$$A_{\substack{i_1 i_2 \,.\,.\, i_p\\ k_1 k_2 \,.\,.\, k_p}} = (-1)^{\lambda} M_{\substack{i_1 i_2 \,.\,.\, i_p\\ k_1 k_2 \,.\,.\, k_p}}, \tag{20}$$

гдѣ $\quad \lambda = [i_1 i_2 \,.\,.\, i_p \; 1\; 2 \,.\,.\, n] + [k_1 k_2 \,.\,.\, k_p \; 1\; 2 \,.\,.\, n] \quad$ (21)

Замѣтимъ, что послѣдовательность $i_1 i_2 \,.\,.\, i_p \; 1\; 2 \,.\,.\, n$ слѣдуетъ понимать такъ: сначала идутъ p выбранныхъ номеровъ $i_1 i_2 \,.\,.\, i_p$, а за ними тѣ изъ ряда отъ 1 до n которыхъ не достаетъ; тоже относится и къ послѣдовательности $[k_1 k_2 \,.\,.\, k_p \; 1\; 2 \,.\,.\, n]$.

Чтобы дать теперь окончательную форму предложеніямъ, которыя выражаются формулами (16) и (20), мы докажемъ теорему о счетѣ числа инверсій въ послѣдовательности путемъ ея подраздѣленія на группы.

Пусть у насъ въ послѣдовательности $1, 2, 3, \ldots n-1, n$ какъ-нибудь переставлены члены, новое расположеніе ихъ представимъ такъ:

$i_1 i_2 i_3 \ldots i_p k_1 k_2 k_3 \ldots k_p$, причемъ $p+q=n$.

Число инверсій въ новомъ расположеніи, т.-е.

$$[i_1 i_2 i_3 \ldots i_p k_1 k_2 k_q] \qquad (22)$$

можно, очевидно, разбить на три слагаемыхъ (класса):

1) число инверсій въ группѣ $i_1 i_2 \ldots i_p$, т.-е. $[i_1 i_2 \ldots i_p]$;
2) число инверсій въ группѣ $k_1 k_2 \ldots k_q$, т.-е. $[k_1 k_2 \ldots k_q]$;
3) число инверсій, представляемыхъ каждымъ изъ элементовъ $i_1 i_2, \ldots i_p$ относительно элементовъ второй группы $k_1 k_2 \ldots k_q$.

Ясно, что число инверсій 3-го рода не измѣнится, если мы въ каждой изъ двухъ нашихъ группъ расположимъ номера въ нормальномъ ихъ порядкѣ (т.-е. порядкѣ возрастанія). Обозначимъ номера $i_1 i_2 \ldots i_p$, нормально расположенные, черезъ $J_1, J_2, \ldots J_p$ равнымъ образомъ номера $k_1 k_2 \ldots k_q$ въ нормальномъ порядкѣ черезъ $K_1, K_2, \ldots K_q$.

Число инверсій 3-го рода въ послѣдовательности (22) будетъ равно числу инверсій

$$[J_1 J_2 \ldots J_p \; K_1 \; K_2 \ldots K_q]. \qquad (23)$$

Еще разъ отмѣтимъ, что номера $J_1 J_2 \ldots J_p$ идутъ въ порядкѣ возрастанія, слѣдовательно, никакое J_m не представляетъ инверсій съ другимъ $J_{m'}$, тоже относится и къ $K_1 K_2 \ldots K_q$.

Такимъ образомъ въ послѣдовательности (23) инверсіи могутъ составлять только какое-нибудь J_m относительно какого-нибудь $K_{m'}$.

Элементъ J_1 дѣлаетъ инверсіи со всѣми младшими ему номерами изъ ряда $1, 2 \ldots n$, т.-е. онъ дѣлаетъ J_1-1 инверсій; элементъ J_2 дѣлаетъ инверсіи со всѣми младшими по отношенію къ нему, за исключеніемъ одного элемента J_1 (ибо J_1 предшествуетъ J_2), итакъ J_2 дѣлаетъ J_2-2 инверсіи; далѣе J_3 дѣлаетъ инверсіи со всѣми младшими, кромѣ элементовъ J_1, J_2, слѣдовательно, J_3 дѣлаетъ J_3-3 инверсій и т. д.

Итакъ:

$$[J_1 J_2 \ldots J_p K_1 K_2 \ldots K_q] = (J_1-1)+(J_2-2)+$$
$$+(J_3-3)+\ldots+(J_p-p) = J_1+J_2+\ldots+J_p - \frac{p(p+1)}{2}$$

Сумма же номеровъ $J_1+J_2+\ldots+J_p$ будетъ равна суммѣ $i_1+i_2+\ldots+i_p$, ибо это тѣ же самые номера, но только въ другомъ порядкѣ.

Суммируя всѣ три указанныхъ класса инверсій для послѣдовательности (22), мы получимъ:

$$[i_1 \; i_2 \ldots i_p \, k_1 \; k_2 \ldots k_b] = [i_1 \; i_2 \ldots i_p] + [k_1 \; k_2 \ldots k_q] +$$
$$+ \sum_1^p i_\mu - \frac{p(p+1)}{2}. \qquad (24)$$

Это соотношеніе показываетъ, какъ можно подсчитывать число инверсій данной послѣдовательности, подраздѣляя ее на двѣ группы.

Примѣры:

1) $[471,3265]=[471]+[3265]+(4+7+1)-\frac{3\,.\,4}{2}=$

$=2+2+12-6=10.$

2) $[4713,265]=[4713]+[265]+(4+7+1+3)-\frac{4\,.\,5}{2}=$

$=4+1+15-10=10.$

Примѣнимъ теперь доказанную теорему для упрощенія выраженія (21).

Прежде всего

$$[i_1\, i_2\, .\; .\, i_p\, 1\, 2\, .\; .\, n]=[i_1\, i_2\, .\; .\, i_p]+\sum_1^p i_\mu-\frac{p(p+1)}{2}$$

подобнымъ же образомъ:

$$[k_1\, k_2\, .\; .\, k_p\, 1\, 2\, .\; .\, n]=[k_1\, k_2\, .\; .\, k_p]+\sum_1^p k_\nu-\frac{p(p+1)}{2}$$

Итакъ формула (21) принимаетъ видъ:

$$\lambda=[i_1\, i_2\, .\; .\, i_p]+[k_1\, k_2\, .\; .\, k_p]+\Sigma i+\Sigma k-p(p+1),$$

произведеніе (двухъ послѣдовательныхъ чиселъ) $p(p+1)$ будетъ четнымъ числомъ, его можно отбросить, ибо оно не измѣняетъ характера числа λ:

$$\lambda'=[i_1\, i_2\, .\; .\, i_p]+[k_1\, k_2\, .\; .\, k_p]+\Sigma i+\Sigma k. \qquad (25)$$

Слѣдовательно, зависимость (20) между адъюнктой порядка p и соотвѣтствующимъ ей миноромъ будетъ такова:

$$A_{\substack{i_1 i_2 \,..\, i_p \\ k_1 k_2 \,..\, k_p}}=(-1)^{\lambda'}\, M_{\substack{i_1 i_2 \,..\, i_p \\ k_1 k_2 \,..\, k_p}}\,. \qquad (26).$$

Въ частности, если номера $i_1\, i_2\, .\; .\, i_p$ и номера $k_1\, k_2\, .\; .\, k_p$ слѣдуютъ въ нормальномъ порядкѣ. формула (26) упрощается:

$$A_{\substack{i_1 i_2 \,..\, i_p \\ k_1 k_2 \,..\, k_p}}=(-1)^{\Sigma i+\Sigma k}\, M_{\substack{i_1 i_2 \,..\, i_p \\ k_1 k_2 \,..\, k_p}}\,. \qquad (27)$$

причемъ:

$$i_1<i_2<i_3\, .\; .\; .<i_p$$
$$k_1<k_2<k_3\, .\; .\; .<k_p\,.$$

Глава IV.

Теорема Laplace'а.

1. Разложеніе по элементамъ двухъ строкъ. Мы видѣли, что произведеніе (гл. III, § 3):

$$a_{i_1 k_1}\, a_{i_2 k_2}\, A_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}}=(-1)^{\lambda}\, a_{i_1 k_1}\, a_{i_2 k_2}\, M_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}}\,, \qquad (1)$$

гдѣ $\qquad \lambda=[i_1\, i_2]+[k_1\, k_2]+i_1+i_2+k_1+k_2\,,$

входитъ въ составъ даннаго опредѣлителя $\Delta=|\,a_{ik}\,|$.

Опредѣлитель $M_{\substack{i_1 i_2\\k_1 k_2}}$ получается изъ начальнаго вычеркиваніемъ двухъ строкъ i_1, i_2 и двухъ столбцовъ k_1, k_2, разумѣется, результатъ такого вычеркиванія будетъ одинъ и тотъ же, въ какомъ бы порядкѣ мы его ни произвели; такимъ образомъ:

$$M_{\substack{i_1 i_2\\k_1 k_2}} = M_{\substack{i_2 i_1\\k_1 k_2}}.$$

Если мы возьмемъ выраженіе, тоже входящее въ составъ Δ:

$$a_{i_2 k_1}\ a_{i_1 k_2}\ A_{\substack{i_2 i_1\\k_1 k_2}} = (-1)^{\lambda'}\ a_{i_2 k_1}\ a_{i_1 k_2}\ M_{\substack{i_2 i_1\\k_1 k_2}}, \tag{2}$$

гдѣ $$\lambda' = [i_2 i_1] + [k_1 k_2] + i_1 + i_2 + k_1 + k_2,$$

то миноры при этихъ парахъ элементовъ опредѣлителя будутъ одинаковы. Нетрудно видѣть, что разность

$$\lambda - \lambda' = [i_1 i_2] - [i_2 i_1] = \pm 1.$$

Ибо, если $[i_1 i_2] = 0$ $(i_1 < i_2)$, то $[i_2 i_1] = 1$ и $\lambda - \lambda' = -1$, если же $i_1 > i_2$, то $\lambda - \lambda' = 1 - 0 = 1$. Слѣдовательно

$$(-1)^{\lambda'} = -(-)^{\lambda}.$$

Возьмемъ сумму выраженій (1) и (2), это будетъ:

$$a_{i_1 k_1}\ a_{i_2 k_2}\ A_{\substack{i_1 i_2\\k_1 k_2}} + a_{i_2 k_1}\ a_{i_1 k_2}\ A_{\substack{i_2 i_1\\k_1 k_2}} =$$

$$= (-1)^{\lambda}\ (a_{i_1 k_1}\ a_{i_2 k_2} - a_{i_2 k_1}\ a_{i_1 k_2})\ M_{\substack{i_1 i_2\\k_1 k_2}}:$$

или
$$(-1)^{\lambda} \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1}, & a_{i_1 k_2}\\ a_{i_2 k_1}, & a_{i_2 k_2}\end{vmatrix} . M_{\substack{i_1 i_2\\k_1 k_2}}. \tag{3}$$

Изъ способа полученія этого произведенія ясно, что оно входитъ въ составъ даннаго опредѣлителя. Выбравъ двѣ опредѣленныхъ строки i_1 и i_2, будемъ для значковъ k_1 и k_2 брать всевозможныя парныя сочетанія изъ номеровъ $1, 2, 3 \ldots n$, мы получимъ $C^2_n = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ произведеній вида (3). Составимъ сумму ихъ:

$$\sum_{k_1, k_2} (-1)^{\lambda} \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1}, & a_{i_1 k_2}\\ a_{i_2 k_1}, & a_{i_2 k_2}\end{vmatrix} . M_{\substack{i_1 i_2\\k_1 k_2}}. \tag{4}$$

Эта сумма будетъ какъ разъ опредѣлитель $\Delta = |\ a_{ik}\ |$. Въ самомъ дѣлѣ, въ произведеніяхъ вида (3) всѣ слагаемыя различны, при постоянныхъ i_1, i_2, и при указанномъ способѣ выбора значковъ k_1, k_2, всѣ эти слагаемыя, какъ не разъ говорили, принадлежатъ опредѣлителю Δ, вопросъ, слѣдовательно, сстается только въ томъ, захватитъ ли сумма (4) всѣ члены опредѣлителя Δ.

Въ произведеніи (3) первый множитель, какъ опредѣлитель 2-го порядка, содержитъ два члена, второй множитель $M_{\substack{i_1 i_2\\k_1 k_2}}$, какъ

опредѣлитель порядка $n-2$ содержитъ $(n-2)!$ членовъ; слѣдовательно, каждое выраженіе (3) содержитъ по раскрытіи $2.(n-2)!$ членовъ, въ сумму же (4) входитъ C^2_n такихъ выраженій. Итакъ сумма (4) по раскрытіи будетъ содержать: $2.(n-2)\frac{n(n-1)}{1.2}=n!$ членовъ, т. е. какъ разъ столько же, сколько ихъ будетъ въ опредѣлителѣ порядка n. Итакъ, формула (4) даетъ намъ разложеніе опредѣлителя по опредѣлителямъ 2-го порядка, составленнымъ изъ элементовъ двухъ выбранныхъ строкъ i_1 и i_2:

$$\Sigma(-1)^{\lambda}\begin{vmatrix} a_{i_1k_1}, & a_{i_1k_2} \\ a_{i_2k_1}, & a_{i_2k_2}\end{vmatrix} . M_{\substack{i_1 i_2\\ k_1k_2}}=\Delta, \tag{5}$$

причемъ: $\lambda=[i_1i_2]+[k_1k_2]+i_1+i_2+k_1+k_2$.

2. Разложеніе по элементамъ p любыхъ строкъ. Выберемъ теперь p какихъ-нибудь строкъ $i_1, i_2, i_3, \ldots i_p$, тогда произведеніе

$$a_{i_1k_1}\, a_{i_2k_2} \ldots a_{i_pk_p}\, A_{\substack{i_1 i_2\ldots i_p\\ k_1k_2\ldots k_p}}$$

или равное ему [глав. III (16)]:

$$(-1)^{\lambda}\, a_{i_1k_1}\, a_{i_2k_2} \ldots a_{i_pk_p}\, M_{\substack{i_1 i_2\ldots i_p\\ k_1k_2\ldots k_p}}, \tag{6}$$

гдѣ: $\lambda=[i_1\, i_2 \ldots i_p]+[k_1\, k_2\ldots k_p]+\sum_1^p i_\mu+\sum_1^p k_r$

принадлежитъ опредѣлителю. Миноръ $M_{\substack{i_1 i_2\ldots i_p\\ k_1k_2\ldots k_p}}$ не измѣнится, если мы переставимъ какъ угодно значки $i_1, i_2, \ldots i_p$. Пусть же новое какое-нибудь расположеніе этихъ значковъ будетъ $j_1 j_2, \ldots j_p$, тогда:

$$M_{\substack{i_1 i_2\ldots i_p\\ k_1k_2\ldots k_p}}=M_{\substack{j_1 j_2\ldots j_p\\ k_1k_2\ldots k_p}}$$

Переставивъ всевозможными способами выбранные значки $i_1 i_2, \ldots i_p$ въ произведеніи (6), возьмемъ сумму всѣхъ полученныхъ выраженій; эта сумма будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$(-1)^{\lambda} M_{\substack{i_1 i_2\ldots i_p\\ h_1k_2\ldots k_p}}\, \Sigma(-1)^{\lambda'-\lambda}. a_{j_1k_1}\, a_{j_2k_2}\ldots a_{j_pk_p}. \tag{7}$$

здѣсь разность $\lambda'-\lambda$ равна:

$[j_1\, j_2 \ldots j_p]-[i_1\, i_2\ldots i_p]$, т. е.

она будетъ давать число инверсій въ ряду $j_1 j_2 \ldots j_p$ не абсолютное, а по отношенію къ выбранной послѣдовательности $i_1\, i_2 \ldots i_p$; суммированіе въ формулѣ (7) распространяется на всевозможныя размѣщенія изъ p номеровъ $i_1\, i_2 \ldots i_p$, такимъ образомъ эта сумма [гл. I, § 7] будетъ опредѣлитель порядка p:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & . & . & a_{i_1k_p} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & . & . & a_{i_2k_p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{i_pk_1} & a_{i_pk_2} & . & . & a_{i_pk_p} \end{vmatrix}$$

Выраженіе (7) принимаетъ теперь слѣдующій видъ:

$$(-1)^{\lambda} \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & . & . & a_{i_1k_p} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & . & . & a_{i_2k_p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{i_pk_1} & a_{i_pk_2} & . & . & a_{i_pk_p} \end{vmatrix} . M_{\substack{i_1 i_2 \,.\,.\, i_p \\ k_1 k_2 \,.\,.\, k_p}} . \qquad (8)$$

Составимъ теперь сумму произведеній (8), взявъ для $k_1, k_2, k_3 \,.\,.\, k_p$ всевозможныя сочетанія по p номеровъ изъ всѣхъ n номеровъ 1, 2, 3 . . . n:

$$\sum_{k_1k_2 \,.\,.\, k_p} (-1)^{\lambda} \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & . & . & a_{i_1k_p} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & . & . & a_{i_2k_p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{i_pk_1} & a_{i_pk_2} & . & . & a_{i_pk_p} \end{vmatrix} M_{\substack{i_1 i_2 \,.\,.\, i_p \\ k_1 k_2 \,.\,.\, k_p}} \qquad (9)$$

всѣхъ произведеній вида (8), входящихъ въ сумму (9), будетъ $C^p{}_n$, каждое изъ нихъ принадлежитъ данному опредѣлителю Δ, далѣе они различны между собой. Сосчитаемъ число членовъ, которое будетъ имѣть сумма (9), если раскрыть всѣ произведенія. Каждый первый множитель — опредѣлитель порядка p, содержитъ, слѣдовательно, $p!$ членовъ; каждый второй множитель (миноръ M) — опредѣлитель порядка $n-p$ и будетъ содержать $(n-p)!$ членовъ.

Такимъ образомъ, вся сумма (9) по раскрытіи содержитъ $C^p{}_n \,.\, p! \,(n-p)! = n!$ членовъ, различныхъ и принадлежащихъ данному опредѣлителю Δ, слѣдовательно, она тождественна съ опредѣлителемъ Δ:

$$\sum_{k_1k_2 \,.\,.\, k_p} (-1)^{\lambda} \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & . & . & a_{i_1k_p} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & . & . & a_{i_2k_p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{i_pk_1} & a_{i_pk_2} & . & . & a_{i_pk_p} \end{vmatrix} . M_{\substack{i_1 i_2 \,.\,.\, i_p \\ k_1 k_2 \,.\,.\, k_p}} = \Delta, \qquad (10)$$

гдѣ. $\lambda = [i_1\ i_2\ .\ .\ i_p] + [k_1\ k_2\ .\ .\ k_p] + (i_1 + i_2\ .\ .\ + i_p) + $
$+ (k_1 + k_2 + \ .\ .\ k_p);$

формула (10) выражаетъ собой теорему Laplace'a, дающую разложенiе опредѣлителя въ сумму произведенiи дополнительныхъ миноровъ, въ этомъ произведенiи первые множители составляются изъ элементовъ p опредѣленныхъ строкъ $i_1, i_2, \ldots i_p$. Ясно, какъ аналогичнымъ путемъ мы можемъ составить разложенiе даннаго опредѣлителя въ сумму произведенiй дополнительныхъ миноровъ, принадлежащихъ p опредѣленнымъ выбраннымъ столбцамъ $k_1, k_2, \ldots k_v$. Въ этомъ случаѣ въ формулѣ (10) суммированiе придется вести по всевозможнымъ сочетанiямъ изъ всѣхъ n строкъ по p.

Примѣръ 1: Разложить опредѣлитель 5-го порядка по минорамъ 2-ой и 5-ой строки:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_3 & d_3 & e_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_5 & c_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & e_1 \\ b_3 & d_3 & e_3 \\ b_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_5 & d_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & e_1 \\ b_3 & d_3 & e_3 \\ b_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_2 & e_2 \\ a_5 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_5 & c_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & e_1 \\ a_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_5 & d_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ a_3 & c_3 & e_3 \\ a_4 & c_4 & e_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & e_2 \\ b_5 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_5 & d_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_3 & b_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & e_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_2 & e_2 \\ d_5 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} c_2 & e_2 \\ c_5 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Примѣръ 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c_1 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & d_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & d_4 & 0 \\ a_5 & b_5 & 0 & d_5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \\ a_5 & b_5 & d_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Замѣчаніе 1. Какъ показываютъ предыдущіе примѣры, теоремой Laplace'a можно пользоваться для развертыванія и вмѣстѣ съ тѣмъ для вычисленія опредѣлителей.

Замѣчаніе 2. Второй изъ этихъ примѣровъ можно обобщить слѣдующимъ образомъ: если въ опредѣлителѣ всѣ элементы, принадлежащіе какимъ-либо n строкамъ и m столбцамъ (прямоугольникъ), суть нули, то онъ равенъ произведенію двухъ дополнительныхъ подопредѣлителей порядка n и порядка m;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1n} & a_{1n+1} & a_{1n+2} & \cdot & \cdot & a_{1n+m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2n} & a_{2n+1} & a_{2n+2} & \cdot & \cdot & a_{2n+m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nn} & a_{nn+1} & a_{nn+2} & \cdot & \cdot & a_{nn+m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \alpha_{1m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdot & \cdot & \alpha_{mm} \end{vmatrix} = \left| a_{ik} \right|_n \cdot \left| \alpha_{ik} \right|_m \cdot \qquad (11)$$

Величины a_{ik}, для которыхъ $1 \leqslant i \leqslant n$, a $n+1 \leqslant k \leqslant n+m$ въ правой части равенства не входятъ и, слѣдовательно. не вліяютъ на значеніе даннаго опредѣлителя.

Замѣчаніе 3. Возьмемъ опредѣлитель n — аго порядка $\Delta = | a_{ik} |$ и прибавимъ въ немъ лишнюю строку и лишній столбецъ, получимъ новый опредѣлитель:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdot & \cdot & \cdot & y_n & z \end{vmatrix}$$

который по отношенію къ начальному называется *окаймленнымъ*. Поставимъ себѣ задачей развернуть его по вновь введеннымъ величинамъ $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ z. Прежде всего разложивъ D по элементамъ послѣдняго столбца (или послѣдней строки) мы легко найдемъ, что z входитъ въ окаймленный опредѣлитель въ первой степени съ коэффиціентомъ равнымъ Δ, остальные же члены опредѣлителя будутъ содержать парныя произведенія $x_p y_q$. Постараемся опредѣлить коэффиціенты при этихъ произведеніяхъ. Легко видѣть, что въ составъ D будетъ входить выраженіе [формула (3) этой главы]:

$$(-1)^{\lambda} \begin{vmatrix} a_{pq} & x_p \\ y_q & z \end{vmatrix} \cdot M_{\substack{p,n+1 \\ q,n+1}} ,$$

гдѣ $\lambda = p+n+1+q+n+1$ и миноръ второго порядка взять по отношенію къ опредѣлителю D. Далѣе, съ одной стороны произведеніе $x_p\ y_q$ входитъ только въ указанное выраженіе и въ остальныхъ членахъ опредѣлителя D не встрѣчается, съ другой стороны упомянутый миноръ второго порядка опредѣлителя D будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ миноромъ перваго порядка $M_{p,q}$ для начальнаго опредѣлителя Δ. Итакъ, искомый коэффиціентъ для произведенія $x_p\ y_q$ вполнѣ опредѣляется, онъ будетъ:

$$-(-1)^{p+q} M_{p,q}\ ,$$

и разложеніе опредѣлителя D представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$D = \Delta z - \sum_{p,q} (-1)^{p+q} M_{p,q}\, x_p y_q$$

или на основаніи (3) главы III-ей:

$$D = \Delta z - \sum_{p,q} A_{p,q}\, x_p y_q.$$

Глава V.

Перемноженіе опредѣлителей.

1. Произведеніе двухъ опредѣлителей 2-го порядка. Согласно замѣчанію (2) предыдущей главы произведеніе двухъ опредѣлителей порядковъ n и m можно представить въ видѣ опредѣлителя порядка $m+n$. Посмотримъ теперь, какъ можно понизить порядокъ опредѣлителя-произведенія. Замѣтимъ прежде всего, что порядокъ опредѣлителя мы всегда можемъ повысить на любое число единицъ; какъ показываетъ это слѣдующій примѣръ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ c_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

Здѣсь рядъ чиселъ a_3, b_3, a_4, b_4, . . . совершенно произволенъ и не вліяетъ на значеніе новообразуемыхъ опредѣлителей. Такимъ образомъ въ дальнѣйшемъ мы можемъ разсматривать лишь произведеніе двухъ опредѣлителей одинаковаго порядка. Разсмотримъ сначала простѣйшій примѣръ перемноженія двухъ опредѣлителей 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

во второй части равенства въ правомъ верхнемъ квадратѣ, какъ было указано раньше, можно поставить какія угодно числа: для послѣдующаго оказывается удобнымъ по діагонали въ этомъ квадратѣ поставить —1, а остальные элементы принять равными нулю.

Для упрощенія опредѣлителя (1) прибавимъ къ элементамъ перваго столбца соотвѣтственно элементы 3-го столбца, умноженные на α_1, и затѣмъ элементы 4-го столбца, умноживъ ихъ предварительно на α_2; наконецъ къ элементамъ 2-го столбца прибавимъ соотвѣтственно элементы 3-го и 4-го, умноживъ ихъ предварительно на b_1 и b_2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & -1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & -1 \\ a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 & b_1\alpha_1 + b_1\beta_2 & \alpha_1 & \beta_1 \\ a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 & b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \qquad (2).$$

Примѣняя къ опредѣлителю (2) теорему Laplace'а мы найдемъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{[34]+[12]+3+4+1+2} \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 & b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 & b_1\alpha_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

или окончательно:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 & b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 & b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix} \qquad (3).$$

Таково произведеніе двухъ опредѣлителей 2-го порядка въ формѣ опредѣлителя того же порядка.

Составъ элементовъ опредѣлителя-произведенія у насъ получился такой: элементы столбцовъ перваго опредѣлителя комбинируются съ элементами строкъ второго, будемъ кратко говорить, что перемножаются *столбцы на строки*. Если въ первомъ опредѣлителѣ замѣнить столбцы на строки, а строки на столбцы, тогда то же правило по отношенію къ начальнымъ опредѣлителямъ дастъ произведеніе *строкъ на строки*. Производя такую же замѣну столбцовъ строками и строкъ столбцами во второмъ опредѣлителѣ, мы получимъ еще два способа составленія произведенія: *столбцы на столбцы, строки на столбцы*. Итакъ, произведеніе двухъ опредѣлителей можетъ быть составлено четырьмя способами:

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1 & b_1\alpha_1+b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2+a_2\beta_2 & b_1\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_2\alpha_1+b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2+b_1\beta_2 & a_2\alpha_2+\beta_2 b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1+b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1+a_2\beta_2 & b_1\beta_1+b_2\beta_2 \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\alpha_2 & a_2\alpha_1+b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1+b_1\beta_2 & a_2\beta_1+b_2\beta_2 \end{vmatrix}
$$

Развертывая эти произведенія, нетрудно непосредственно убѣдиться въ ихъ тождествѣ.

2. Произведеніе опредѣлителей высшихъ порядковъ. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію общаго случая. Произведеніе двухъ опредѣлителей порядка n можно, какъ было ранѣе указано, представить въ видѣ опредѣлителя порядка $2n$:

$$
|a_{ik}| \cdot |b_{ik}| = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{nn}
\end{vmatrix} \qquad (5).
$$

Умноживъ элементы $n+1$ столбца на a_{11}, элементы $n+2$ на a_{21}, ... , элементы $2n$-го столбца на a_{n1}, прибавимъ ихъ соотвѣтственно къ элементамъ 1-го столбца; затѣмъ, умноживъ элементы $n+1$, $n+2$, ... $2n$ столбцовъ соотвѣтственно на a_{12}, a_{22} . . a_{n2} прибавимъ ихъ къ элементамъ 2-го столбца и т. д., наконецъ элементы $n+1$, $n+2$, ... $2n$ столбцовъ, умноженные соотвѣтственно на a_{1n} a_{2n}, . . . a_{nn}, прибавимъ къ элементамъ n-аго столбца: Тогда мы получимъ слѣдующій опредѣлитель, равный опредѣлителю (5):

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\
c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & c_{23} & \ldots & c_{2n} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & c_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{nn}
\end{vmatrix} \qquad (6).
$$

причемъ здѣсь для краткости принято:

$$c_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} b_{ih}\, a_{hk}\,. \tag{7}$$

Такъ какъ въ опредѣлителѣ (6) лѣвый верхній квадратъ состоитъ изъ элементовъ, равныхъ нулю, то по теоремѣ Laplace'а, опредѣлитель (6) будетъ равенъ произведенію двухъ своихъ дополнительныхъ миноровъ:

$$| c_{ik} | \ . \ (-1)^n \ . \ (-1)^{\lambda}, \text{ гдѣ:}$$

$$\lambda = [n+1, n+2, \ldots 2n] + [1, 2, \ldots n] + (n+1+n+2+\ldots+2n) + (1+2+\ldots+n).$$

Упростимъ теперь показатель степени отъ -1:

$$n+\lambda = n + n^2 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = 2n(n+1),$$

т.-е. число четное. Итакъ, окончательно находимъ:

$$| a_{ik} | \ . \ | b_{ik} | = | c_{ik} |, \tag{8}$$

гдѣ элементы c_{ik} опредѣляются равенствомъ (7). Эти элементы представляютъ изъ себя суммы произведеній элементовъ столбцовъ перваго опредѣлителя на элементы строкъ второго опредѣлителя.

3. Четыре вида произведенія. Если мы, какъ было сдѣлано для опредѣлителей второго порядка, въ первомъ или второмъ опредѣлителѣ замѣнимъ строки столбцами, а столбцы строками и затѣмъ составимъ произведеніе по только что полученному правилу, перемножая *столбцы на строки* (выражаясь кратко), то по отношенію къ начальному расположенію двухъ данныхъ опредѣлителей мы обнаружимъ возможность составлять ихъ произведеніе, перемножая *столбцы на столбцы* или *строки на строки*, или, наконецъ, *строки на столбцы*. Слѣдовательно, элементы опредѣлителя-произведенія могутъ быть опредѣлены слѣдующими четырьмя способами:

$$c_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{hk}\, b_{ih}, \qquad c'_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{hk}\, b_{hi},$$
$$c''_{ik} = \sum_{h} a_{kh}\, b_{ih}, \qquad c'''_{ik} = \sum_{h} a_{kh}\, b_{hi}. \tag{9}$$

Въ этихъ формулахъ относительное расположеніе двухъ значковъ i и k не играетъ роли; если бы мы ихъ переставили между собой, то это было бы равносильно замѣнѣ въ опредѣлителѣ $| c_{ik} |$ строкъ столбцами и столбцовъ строками, что, какъ извѣстно, не мѣняетъ значенія опредѣлителя.

Примѣръ 1.

$$| a_1\ b_2\ c_3 | \ . \ | \alpha_1\ \beta_2 | = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 & a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 & a_3 \\ b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 & b_1\beta_2 + b_2\beta_2 & b_3 \\ c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 & c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Примѣръ 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & . & . & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & . & . & x_n^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & . & . & x_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} n & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \dots & \sigma_{n-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \dots & \sigma_n \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \dots & \sigma_{n+1} \\ . & . & . & . & . & . \\ \sigma_{n-1} & \sigma_n & \sigma_{n+1} & \sigma_{n+2} & \dots & \sigma_{2n-2} \end{vmatrix},$$

гдѣ $\sigma_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \,.\;.+ x_n^k$.

Примѣръ 3. Квадратъ любого опредѣлителя:

$$| a_{ik} |^2 = | c_{ik} |,$$

причем согласно форм. (7):

$$c_{ik} = \sum_h a_{ih}\, a_{kh}, \text{ если } k \neq i \qquad (10)$$

$$c_{ii} = \sum a^2_{ih}$$

Согласно замѣчанію, помѣщенному послѣ форм. (9), въ нашемъ случаѣ (10) даетъ $c_{ik} = c_{ki}$; такой опредѣлитель, у котораго элементы, одинаково расположенные относительно главной діагонали, равны $[c_{ik} = c_{ki}]$, называется симметричнымъ опредѣлителемъ. Квадратъ всякаго опредѣлителя будетъ опредѣлителемъ симметричнымъ.

Глава VI.

Опредѣлитель сопряженный данному и его миноры.

1. Опредѣлитель, составленный изъ адъюнктъ даннаго опредѣлителя. Пусть данъ опредѣлитель порядка n, который мы обозначимъ черезъ $\Delta = | a_{ik} |$; опредѣлитель, составленный изъ адъюнктъ даннаго, называется ему сопряженнымъ. Будемъ сопряженный опредѣлитель обозначать черезъ A, такъ что:

$$A = | A_{ik} |. \qquad (1)$$

Вычислимъ сопряженный опредѣлитель черезъ элементы даннаго, съ этой цѣлью составимъ произведеніе:

$$\Delta . A = | a_{ik} | . | A_{ik} |. \qquad (2)$$

Это произведеніе будетъ:

$$\Delta\ A = | c_{ik} | \qquad (3)$$

гдѣ c_{ik} получится по одной изъ формулъ (9) предыдущей главы, перемножая, напримѣръ, *столбцы на столбцы* въ слѣдующемъ видѣ:

$$c_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{ih} \cdot A_{kh} \tag{4}$$

Но на основаніи § 4 главы II-ой:

$$c_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k \text{ и } c_{ii} = \Delta .$$

Слѣдовательно, въ опредѣлителѣ (3) всѣ элементы, кромѣ расположенныхъ по главной діагонали, равны нулю, такой опредѣлитель равенъ произведенію элементовъ, расположенныхъ по главной діагонали. Итакъ, равенство (3) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$A \cdot \Delta = \Delta^n \text{, откуда}$$

$$A = \Delta^{n-1}. \tag{5}$$

Опредѣлитель, сопряженный данному, равенъ $n-1$ степени его. Формула (5) представляетъ изъ себя тождество (буквенное), она справедлива при всякихъ значеніяхъ элементовъ a_{ik}, поэтому результатъ вывода долженъ оставаться правильнымъ и въ томъ случаѣ, когда элементы a_{ik} подобраны такъ, что опредѣлитель Δ обращается въ нуль. Отсюда ясно, что сопряженный опредѣлитель обращается въ нуль одновременно съ даннымъ.

Примѣръ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = 12, A = \begin{vmatrix} 36, & -18, & 4 \\ -30, & 24, & -6 \\ 6 & 6, & 2 \end{vmatrix} = 144 = 12^2.$

2. Опредѣлитель, составленный изъ миноровъ даннаго опредѣлителя. Поставимъ въ сопряженномъ опредѣлителѣ $| A_{ik} |$ вмѣсто адъюнктъ A_{ik} ихъ выраженія черезъ соотвѣтствующіе имъ миноры:

$$A = | (-1)^{i+k} M_{ik} | \tag{6}$$

Въ этомъ опредѣлителѣ умножимъ строки соотвѣтственно на $(-1)^1$, $(-1)^2$, . . . $(-1)^i$, ... $(-1)^n$, а столбцы на $(-1)^1$, $(-1)^2$ . . . $(-1)^k$, . . . $(-1)^n$, тогда весь опредѣлитель умножится на

$$(-1)^{(1+2+..+i+..+n)+(1+2+..+k+..+n)} = +1,$$ т. е. не измѣнится, съ другой стороны элементъ $(-1)^{i+k} M_{ik}$ получитъ, какъ принадлежащій строкѣ i и столбцу k, множитель $(-1)^{i+k}$, слѣдовательно, онъ приметъ видъ:

$$(-1)^{i+k} M_{ik} \cdot (-1)^{i+k} = + M_{ik} .$$

Итакъ, опредѣлитель, составленный изъ адъюнктъ даннаго опредѣлителя, будетъ равенъ опредѣлителю составленному изъ миноровъ (перваго порядка):

$$A = | A_{ik} | = | M_{ik} | = \Delta^{n-1}. \tag{7}$$

3. Миноры сопряженнаго опредѣлителя. Возьмемъ теперь какой-нибудь изъ подопредѣлителей сопряженнаго опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & A_{i_1k_2} & \dots & A_{i_1k_p} \\ A_{i_2k_1} & A_{i_2k_2} & \dots & A_{i_2k_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i_pk_1} & A_{i_pk_2} & \dots & A_{i_pk_p} \end{vmatrix} \tag{8}$$

будемъ его обозначать слѣдующимъ образомъ, отмѣчая взятые строки и столбцы:

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Выразимъ этотъ миноръ сопряженнаго опредѣлителя черезъ элементы начальнаго. На основанiи теоремы L pl e'a его можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & A_{i_1k_2} & \dots & A_{i_1k_p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{i_2k_1} & A_{i_2k_2} & \dots & A_{i_2k_p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ A_{i_pk_1} & A_{i_pk_2} & \dots & A_{i_pk_p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{i_{p+1}k_1} & A_{i_{p+1}k_2} & \dots & A_{i_{p+1}k_p} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ A_{i_nk_1} & A_{i_nk_2} & \dots & A_{i_nk_p} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \tag{10}$$

Индексы $i_{p+1}, i_{p+2}, \dots i_n$ обозначаютъ тѣ изъ номеровъ $1, 2, \dots n$ которые не вошли въ рядъ $i_1, i_2, \dots i_p$; точно также обозначимъ черезъ $k_{p+1}, k_{p+2}, \dots k_n$ тѣ изъ номеровъ $1, 2, \dots n$, которые не вошли въ послѣдовательность $k_1, k_2, k_3, \dots k_p$. Будемъ предполагать въ дальнѣйшемъ, что $i_{p+1} < i_{p+2} < \dots < i_n$ и равнымъ образомъ $k_{p+1} < k_{p+3} < \dots < k_n$, такъ что эти ряды не имѣютъ инверсiй.

Въ данномъ опредѣлителѣ Δ выставимъ теперь на первыя мѣста строки $i_1, i_2, \dots i_p$ и столбцы $k_1, k_2, \dots k_p$:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p & \dots & i_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p & \dots & k_n \end{vmatrix} = (-1)^{\lambda} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = (-1)^{\lambda} \cdot \Delta \tag{11}$$

здѣсь $\lambda = [i_1 i_2 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n] + [k_1 k_2 \dots k_p k_{p+1} \dots k_n]$ или на основанiи (25) главы III:

$$\lambda = [i_1 i_2 \dots i_p] + [k_1 k_2 \dots k_p] + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (i_\mu + k_\mu) \tag{12}$$

Составимъ теперь произведеніе опредѣлителя (10) на Δ', перемножая *столбцы на столбцы:*

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_{hk_1} A_{hk_1}, & \Sigma a_{hk_2} A_{hk_1}, & \ldots & \Sigma a_{hk_p} A_{hk_1} & \Sigma a_{hk_{p+1}} A_{hk_1} & \ldots & \Sigma a_{hk_n} A_{hk_1} \\ \Sigma a_{hk_1} A_{hk_2}, & \Sigma a_{hk_2} A_{hk_2}, & \ldots & \Sigma a_{hk_p} A_{hk_2} & \Sigma a_{hk_{p+1}} A_{hk_2} & \ldots & \Sigma a_{hk_n} A_{hk_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma a_{hk_1} A_{hk_p}, & \Sigma a_{hk_2} A_{hk_p}, & \ldots & \Sigma a_{hk_p} A_{hk_p}, & \Sigma a_{hk_{p+1}} A_{hk_p} & \ldots & \Sigma a_{hk_n} A_{hk_p} \\ a_{i_{p+1}k_1}, & a_{i_{p+1}k_2}, & \ldots & a_{i_{p+1}k_p}, & a_{i_{p+1}k_{p+1}}, & \ldots & a_{i_{p+1}k_n} \\ a_{i_{p+2}k_1}, & a_{i_{p+2}k_2}, & \ldots & a_{i_{p+2}k_p}, & a_{i_{p+2}k_{p+1}}, & \ldots & a_{i_{p+2}k_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_nk_1}, & a_{i_nk_2}, & \ldots & a_{i_nk_p}, & a_{i_nk_{p+1}} & \ldots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix} \quad (13).$$

въ этомъ опредѣлителѣ всѣ элементы первыхъ p строкъ равны нулю, за исключеніемъ тѣхъ, которые принадлежатъ главной діагонали, эти послѣдніе равны всѣ опредѣлителю Δ, а потому наше произведеніе равно:

$$\begin{vmatrix} \Delta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Delta & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i_{p+1}k_{p+1}} & \ldots & a_{i_{p+1}k_n} \\ a_{i_{p+1}k_{p+1}} & \ldots & a_{i_{p+2}k_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_n k_{p+1}} & \ldots & a_{i_n k_n} \end{vmatrix};$$

второй множитель получается изъ даннаго опредѣлителя Δ пропускомъ p строкъ $i_1, i_2, \ldots i_p$ и p столбцовъ $k_1, k_2, \ldots k_p$, слѣдовательно, это есть миноръ $M_{\substack{i_1 \, i_2 \, \ldots \, i_p \\ k_1 \, k_2 \, \ldots \, k_p}}$. Итакъ мы имѣемъ:

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} . (-1)^{\lambda} . \Delta = \Delta^p . M_{\substack{i_1 \, i_2 \, \ldots \, i_p \\ k_1 \, k_2 \, \ldots \, k_p}}$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} = (-1)^{\lambda} . \Delta^{p-1} . M_{\substack{i_1 \, i_2 \, \ldots \, i_p \\ k_1 \, k_2 \, \ldots \, k_p}} \quad (14)$$

причемъ λ дается формулой (12).

Это и есть выраженіе любого минора сопряженнаго опредѣлителя черезъ элементы начальнаго. Обращаемъ вниманіе на то обстоятельство, что индексы, $i_1, i_2, \ldots i_p$, k_1, k_2, k_p употребляются 8
въ обѣихъ частяхъ равенства (14), но въ противоположномъ смыслѣ: въ лѣвой части они указываютъ тѣ строки и столбцы, которые ***входятъ*** въ миноръ слѣва, въ правой же части это тѣ строки и столбцы, которые какъ разъ ***пропущены*** въ минорѣ, вотъ почему и расположеніе значковъ мы приняли различное въ обѣъ частяхъих

равенства. Сверхъ того не мѣшаетъ еще разъ подчеркнуть, что слѣва миноръ составленъ изъ элементовъ сопряженнаго опредѣлителя (или адъюнктъ даннаго), справа миноръ составленъ изъ элементовъ даннаго.

4 Замѣна адъюнктъ минорами. Помножимъ въ опредѣлителѣ (8) строки соотвѣтственно на $(-1)^{i_1}$, $(-1)^{i_2}$, $(-1)^{i_3}$, . . . $(-1)^{i_p}$, а столбцы на $(-1)^{k_1}$, $(-1)^{k_2}$, . . $(-1)^{k_p}$, тогда весь опредѣлитель умножится на:

$$(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_p+k_1+k_2+\ldots+k_p},$$

съ другой стороны каждый изъ его элементовъ получитъ множителемъ —1 въ степени равной суммѣ указателей строки и столбца, слѣдовательно, замѣняя $(-1)^{i+k} A_{ik}$ черезъ M_{ik}, мы полагая:

$$\begin{vmatrix} M_{i_1k_1} & M_{i_1k_2} & \ldots & M_{i_1k_p} \\ M_{i_2k_1} & M_{i_2k_2} & \ldots & M_{i_2k_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{i_pk_1} & M_{i_pk_2} & \ldots & M_{i_pk_p} \end{vmatrix} = M\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_p \\ k_1 k_2 \ldots k_p \end{pmatrix} \tag{15}$$

находимъ, что

$$M\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_p \\ k_1 k_2 \ldots k_p \end{pmatrix} = (-1)^{\sum_1^p} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_p \\ k_1 k_2 \ldots k_p \end{pmatrix} \tag{16}$$

или на основаніи (14):

$$M\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_p \\ k_1 k_2 \ldots k_p \end{pmatrix} = (-1)^{[i]+[k]} \cdot \Delta^{p-1} M_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_p \\ k_1 k_2 \ldots k_p}}, \tag{17}$$

причемъ здѣсь для краткости принято, что

$$[i] = [i_1\ i_2\ i_3 \ldots i_p]$$
$$[k] = [k_1\ k_2\ k_3 \ldots k_p].$$

Положимъ въ частности что $p=2$, (14) тогда даетъ намъ:

$$\begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & A_{i_1k_2} \\ A_{i_2k_1} & A_{i_2k_2} \end{vmatrix} = (-1)^{\lambda} \cdot \Delta \cdot M_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}} \tag{18}$$

5. Адъюнкты и миноры опредѣлителя, обращающагося въ нуль. Если окажется что $\Delta=0$, то адъюнкты удовлетворяютъ отношенію:

$$\frac{A_{i_1k_1}}{A_{i_2k_1}} = \frac{A_{i_1k_2}}{A_{i_2k_2}}$$

Такъ какъ выбранные значки произвольны, то отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{A_{i_1k_1}}{A_{i_2k_1}} = \frac{A_{i_1k_2}}{A_{i_2k_2}} = \frac{A_{i_1k_3}}{A_{i_2k_3}}$$

или

$$\frac{A_{i_1k_1}}{A_{i_1k_2}} = \frac{A_{i_2k_1}}{A_{i_2k_2}} = \frac{A_{i_3k_1}}{A_{i_3k_2}}, \quad \text{т. е.}$$

если опредѣлитель равенъ нулю, то въ опредѣлителѣ ему сопряженномъ элементы двухъ любыхъ строкъ (или двухъ столбцовъ) пропорціональны.

Примѣръ 1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = 12 \qquad A = \begin{vmatrix} 36, & -18, & 4 \\ -30, & 24, & -6 \\ 6, & -5, & 2 \end{vmatrix} = 144 = 12^2$$

$$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & 4 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3+2+3} \cdot \Delta \cdot a_{21} = -12 .$$

Примѣръ 2. Будемъ обозначать адъюнкты сопряженнаго опредѣлителя черезъ α_{ik}. Составимъ изъ этихъ адъюнктъ опредѣлитель.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1k_1} & \alpha_{i_1k_2} & \ldots & \alpha_{i_1k_p} \\ \alpha_{i_2k_1} & \alpha_{i_2k_2} & \ldots & \alpha_{i_2k_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{i_pk_1} & \alpha_{i_pk_2} & \ldots & \alpha_{i_pk_p} \end{vmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix}$$

и вычислимъ его черезъ элементы начальнаго. Послѣдовательное примѣненіе формулы (14) даетъ намъ:

$$\alpha\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} = (-1)^{\lambda} . A^{p-1} . \begin{vmatrix} A_{i_{p+1}k_{p+1}} & \ldots & A_{i_{p+1}k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i_nk_{p+1}} & \ldots & A_{i_nk_n} \end{vmatrix}$$

$$\lambda = [i_1\, i_2 \ldots i_p] + [k_1\, k_2 \ldots k_p] + (i_1 + i_2 + \ldots + i_p) + \\ + (k_1 + k_2 + \ldots + k_p)$$

затѣмъ:

$$A\begin{pmatrix} i_{p+1} & i_{p+2} & \ldots & i_n \\ k_{p+1} & k_{p+2} & \ldots & k_n \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{\mu} . \Delta^{n-p-1} . \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \ldots & a_{i_1k_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_pk_1} & \ldots & a_{i_pk_p} \end{vmatrix} . (-1)^{[i_1\, i_2 \ldots i_p] + [k_1\, k_2 \ldots k_p]}$$

причемъ $\mu = (i_{p+1} + i_{p+2} + \ldots + i_n) + (k_{p+1} + k_{p+2} \ldots + k_n)$. Какъ было доказано $A = \Delta^{n-1}$, съ другой стороны сумма

$$\lambda + \mu + [i_1\, i_2 \ldots i_p] + [k_1\, k_2 \ldots k_p]$$

будетъ четнымъ числомъ. Итакъ:

$$a\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdot & \cdot & i_p \\ k_1 & k_2 & \cdot & \cdot & k_p \end{pmatrix} = \Delta^{(n-2)p} \cdot \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \cdot & \cdot & a_{i_1k_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_pk_1} & \cdot & \cdot & a_{i_pk_p} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Примѣръ 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$ составимъ опредѣлитель ему сопряженный:

$$\begin{vmatrix} -1, & 2, & -1 \\ 2, & -4, & 2 \\ -1, & 2, & -1 \end{vmatrix} = 0$$

въ немъ дѣйствительно элементы двухъ любыхъ строкъ или двухъ любыхъ столбцовъ пропорціональны.

ГЛАВА VII.

Понятіе о матрицѣ и ея рангѣ.

1. Матрица. Будемъ называть матрицей систему $m.\ n$ чиселъ a_{ik}, расположенныхъ въ m строкъ и n столбцовъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Такую матрицу мы будемъ иногда для краткости, обозначать черезъ $(m\ n)$

2. Число опредѣлителей, содержащихся въ матрицѣ. Изъ элементовъ этой матрицы мы можемъ составлять различные опредѣлители любого порядка отъ единицы до меньшаго изъ чиселп m и n. Сочтемъ сколько можемъ мы получить изъ матрицы опредѣлителей заданнаго порядка p. Для полученія какого-нибудь опредѣлителя порядка p мы должны взять элементы матрицы, принадлежащіе одновременно какимъ-нибудь р строкамъ и какимъ-либо p столбцамъ; p строкъ мы можемъ выбрать способами, число которыхъ равно C^p_m, равнымъ образомъ будетъ существовать C^p_n различныхъ комбинацій столбцовъ. Каждая комбинація строкъ можетъ быть соединена съ любой комбинаціей столбцовъ, такимъ

образомъ изъ матрицы (m, n) мы можемъ составить столько опредѣлителей порядка p, сколько единицъ въ произведенiи

$$C^p_m \cdot C^p_n. \qquad (2)$$

Каждый изъ элементовъ a_{ik} данной матрицы можно разсматривать, какъ опредѣлитель 1-го порядка, ей принадлежащiй. Общее число всѣхъ опредѣлителей, которое можно получить изъ матрицы (m, n), будетъ равно:

$$N = C^1_m \cdot C^1_n + C^2_m \cdot C^2_n + C^3_m \cdot C^3_n + \ldots + C^q_m \cdot C^q_n, \qquad (3)$$

гдѣ подъ q разумѣемъ число равное меньшему изъ чиселъ m и n.

Если въ тождествѣ:

$$(x + a)^m \cdot (x + a)^n = (x + a)^{m+n} \qquad (4)$$

развернуть по извѣстной формулѣ Ньютона каждую изъ трехъ степеней двучлена $x + a$, а затѣмъ сравнить коэффицiенты при $x^n a^m$ въ лѣвой и правой части, то получимъ:

$$N = C^q_{m+n} - 1 \qquad (5)$$

3. Число миноровъ опредѣлителя. Если въ таблицѣ (1) число строкъ и столбцовъ одинаково $m = n$, будемъ ее называть квадратной матрицей; изъ нея можно получить только одинъ опредѣлитель наивысшаго порядка n. Согласно предыдущему (фор. 2) опредѣлитель порядка n будетъ имѣть $(C^p_n)^2$ миноровъ порядка $n - p$ (т. е. опредѣлителей порядка p). Общее же число всѣхъ миноровъ опредѣлителя порядка n будетъ (не считая его самого):

$$C^n_{2n} - 2. \qquad (6)$$

Напримѣръ, опредѣлитель 3-го порядка будетъ имѣть 18 миноровъ

4. Рангъ матрицы. Будемъ говорить, что матрица (1) имѣетъ рангъ равный p, если всѣ содержащiеся въ ней опредѣлители порядка $p + 1$ суть нули, но хотя бы одинъ опредѣлитель порядка p отличенъ отъ нуля. Если матрица имѣетъ рангъ p, всѣ опредѣлители порядка $p + 1$ и высшаго суть нули, ибо послѣднiе можно по теоремѣ Laplace'а разложить въ сумму произведенiй опредѣлителей порядка $p + 1$ на опредѣлители, имъ дополнительные.

5. Рангъ опредѣлителя. Подъ рангомъ опредѣлителя порядка n будемъ разумѣть рангъ той квадратной матрицы, изъ которой составленъ данный опредѣлитель. Очевидно рангъ опредѣлителя можно установить и независимо отъ понятiя о матрицѣ: опредѣлитель порядка n будемъ называть имѣющимъ рангъ p, если всѣ его миноры порядка $n - p - 1$ (они будутъ опредѣлителями порядка $p + 1$) суть нули, но хотя одинъ миноръ порядка $n - p$ (т. е. опредѣлитель порядка p) отличенъ отъ нуля.

Если мы къ матрицѣ (1) прибавимъ строку или столбецъ, то мы не уменьшимъ ея ранга, ибо въ ней остаются попрежнему опредѣлители порядка p, отличные отъ нуля; но съ другой стороны

мы можемъ присоединеніемъ строки или столбца повысить рангъ матрицы, ибо можетъ получиться одинъ опредѣлитель порядка $p+1$, содержащій элементы новаго ряда и отличный отъ нуля.

Примѣръ 1. Матрица:

$$\begin{Vmatrix} 1, & 2, & 3, & 3, & 6 \\ 2, & 3, & 4, & 5, & 9 \\ 3, & 4, & 5, & 7, & 12 \\ 3, & 5, & 7, & 8, & 15 \end{Vmatrix}$$

будетъ ранга 2, ибо всѣ, содержащіеся въ ней опредѣлители 3-го порядка, нули, но опредѣлители 2-го порядка не всѣ нули.

Примѣръ 2. Опредѣлитель 5-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 1, & 2 \\ 0, & 1, & 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 1, & 1 & 2, \\ 1, & 1, & 1, & 3, & 6 \\ 2, & 1, & 2, & 6, & 12 \end{vmatrix}$$

будетъ ранга 3; всѣ его подопредѣлители 4-го порядка—нули, нѣкоторые же изъ подопредѣлителей 3-го порядка отличны отъ нуля.

Примѣръ 3. Если опредѣлитель $|a_{ik}|$ равенъ нулю, то опредѣлитель, составленный изъ адъюнктъ A_{ik} его элементовъ, будетъ имѣть рангъ равный 1 (или даже 0, если всѣ $A_{ik}=0$). ибо всѣ его подопредѣлители 2-го порядка суть нули (глава VI § 5).

$$\begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & A_{i_1k_2} \\ A_{i_2k_1} & A_{i_2k_2} \end{vmatrix} = 0$$

6. Опредѣленіе ранга матрицы. Какъ было указано выше, матрица будетъ считаться имѣющей рангъ p, если всѣ ея опредѣлители порядка $p+1$ будутъ нули и хотя одинъ порядка p отличенъ отъ нуля. Спрашивается теперь, какъ же опредѣлить рангъ заданной матрицы. Само собой разумѣется, что пересмотръ всѣхъ ея опредѣлителей порядка $p+1$ будетъ слишкомъ сложнымъ, да и лишнимъ. Вопросъ въ томъ, каково наименьшее число необходимыхъ и достаточныхъ условій, чтобы матрица имѣла опредѣленный рангъ p. Назовемъ *глазными* опредѣлителями матрицы (1′) тѣ ея опредѣлители порядка p, которые отличны отъ нуля, и пусть одинъ изъ нихъ будетъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Присоединяя къ каждому главному опредѣлителю одну изъ оставшихся строкъ матрицы и одинъ изъ оставшихся столбцовъ, будемъ

получать, такъ называемые, *характеристическіе* опредѣлители матрицы. Такъ по отношенію къ выбранному нами главному опредѣлителю (7) характеристическими будутъ опредѣлители:

$$\Delta_{sk} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1p} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2p} & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{p1} & a_{p2} & . & . & . & a_{pp} & a_{pk} \\ a_{s1} & a_{s2} & . & . & . & a_{sp} & a_{sk} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

причемъ:

$$s = p+1,\ p+2, \ldots m,$$
$$k = p+1,\ p+2, \ldots n.$$

Число такихъ характеристическихъ опредѣлителей (для выбраннаго главнаго) будетъ:

$$N = (m-p)\ (n-p). \qquad (9)$$

Чтобы матрица имѣла рангъ p, конечно, необходимо, чтобы всѣ эти N опредѣлителей обращались въ нуль. Докажемъ же, что въ такомъ случаѣ и всѣ остальные опредѣлители порядка $p+1$ изъ данной матрицы обращаются въ нули. Такъ какъ по условію $\Delta_{sk} = 0$, то разлагая его по элементамъ послѣдняго столбца, найдемъ:

$$a_{1k}\ T_1^S + a_{2k}\ T_2^S + \ldots + a_{pk}\ T_p^S + a_{sk}\ \Delta = 0; \qquad (10)$$

всѣ коэффиціенты $T_1^S,\ T_2^S, \ldots T_p^S$ не зависятъ отъ индекса k, а потому соотношеніе (10) остается справедливымъ для всякаго $k > p$ при выбранномъ указателѣ s, но въ силу предложенія (8) главы II-ой это соотношеніе (10) тождественно выполняется и для всякаго $k \leqslant p$. Такъ какъ $\Delta \neq 0$, то (10) разрѣшимо относительно a_{sk}. Итакъ, всѣ элементы a_{sk} любой строки s нашей матрицы являются линейными комбинаціями (съ одинаковыми для всей строки s коэффиціентами) элементовъ первыхъ p строкъ. Въ силу этого свойства всякій опредѣлитель порядка $p+1$ изъ нашей матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & . & . & . & a_{i_1k_{p+1}} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & . & . & . & a_{i_2k_{p+1}} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i_{p+1}k_1} & a_{i_{p+1}k_2} & & & . & a_{i_{p+1}k_{p+1}} \end{vmatrix}$$

будетъ обращаться въ нуль.

Число указанныхъ выше условій для наличія ранга p данной матрицы является наименьшимъ и дальнѣйшее его приведеніе невозможно. Въ самомъ дѣлѣ каждый изъ этихъ N характеристическихъ опредѣлителей содержитъ такой элементъ a_{sk}, который въ остальныхъ не встрѣчается; а потому изъ обращенія въ нуль части этихъ опредѣлителей въ общемъ случаѣ никоимъ образомъ не можетъ вытекать обращеніе въ нуль остальныхъ. Они между собой

независимы. Итакъ, окончательно мы получаемъ: *если $(n-p)$ $(m-p)$ характеристическихъ опредѣлителей, получаемыхъ окаймленіемъ одного главнаго (порядка p), обращаются въ нуль, то матрица будетъ равна p.* Насколько важно упрощеніе, вводимое этимъ предложеніемъ, можетъ показать слѣдующій примѣръ. Матрица (5,7) ранга равнаго 3 имѣетъ всего опредѣлителей 4-го порядка:

$$C_5^4 \,.\, C_7^4 = 175;$$

число же характеристическихъ опредѣлителей, получаемыхъ изъ одного главнаго, равно:

$$(7-3)\ (5-3) = 8.$$

Примѣнимъ полученное предложеніе къ одному частному случаю, который намъ окажется полезнымъ въ дальнѣйшемъ. Разсмотримъ матрицу:

$$\left|\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} & b_n \end{array}\right|, \qquad (11)$$

назовемъ опредѣлитель, составленный изъ ея первыхъ n строкъ и первыхъ n столбцовъ, черезъ Δ; опредѣлитель же этой матрицы, который получается изъ Δ замѣной столбца номера k послѣднимъ столбцомъ матрицы, обозначимъ черезъ Δ_k. Согласно сказанному выше, чтобы матрица (11) имѣла рангъ равный $n-1$ необходимы и достаточны слѣдующія условія:

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & . & . & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & . & . & n-1 \end{array}\right| \neq 0\,,\ \Delta = 0\,,\ \Delta_1 = 0\,,$$

а въ такомъ случаѣ и всякое $\Delta_k = 0$ при $k = 2, 3, \ldots n$.

7. **Опредѣлитель, составленный изъ двухъ матрицъ.** Пусть намъ даны двѣ матрицы (p, q) и (q, p):

$$\left\|\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2q} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & . & . & a_{pq} \end{array}\right\| \quad \text{и} \quad \left\|\begin{array}{cccccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & . & . & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & . & . & b_{2p} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{q1} & b_{q2} & b_{q3} & . & . & b_{qp} \end{array}\right\|. \qquad (12)$$

Составимъ теперь суммы произведеній элементовъ строкъ первой матрицы на соотвѣтственные элементы столбцовъ второй матрицы:

$$c_{ik} = \sum_{h=1}^{h=q} a_{ih}\, b_{hk} \qquad (13)$$

Матрицу $\| c_{ik} \|$ можемъ называть (символически, только по отношенію къ ея составу!) произведеніемъ двухъ данныхъ матрицъ. Всѣхъ элементовъ c_{ik} будетъ p^2, такъ что полученная матрица есть матрица квадратная.

Разсмотримъ теперь опредѣлитель $| c_{ik} |$. составленный указаннымъ способомъ изъ двухъ матрицъ, и найдемъ его значенiе.

Этотъ опредѣлитель подробнѣе напишется такъ:

$$| c_{ik} | = \begin{vmatrix} \Sigma a_{1h} b_{h1}, & \Sigma a_{1h} b_{h2}, & \ldots & \Sigma a_{1h} b_{hp} \\ \Sigma a_{2h} b_{h1}, & \Sigma a_{2h} b_{h2}, & \ldots & \Sigma a_{2h} b_{hp} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma a_{ph} b_{h1}, & \Sigma a_{ph} b_{h2}, & \ldots & \Sigma a_{ph} b_{hp} \end{vmatrix} \qquad (14)$$

во всѣхъ элементахъ опредѣлителя суммированiе ведется по индексу h отъ 1 до q. Опредѣлитель (14) можемъ разложить въ сумму (главы II) опредѣлителей слѣдующимъ образомъ:

$$| c_{ik} | = \Sigma b_{i_1 1}\, b_{i_2 2} \ldots b_{i_p p} \cdot \begin{vmatrix} a_{1i_1}, & a_{1i_2} & \ldots & a_{1i_p} \\ a_{2i_1}, & a_{2i_2} & \ldots & a_{2i_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{pi_1}, & a_{pi_2} & \ldots & a_{pi_p} \end{vmatrix} \qquad (15)$$

здѣсь $i_1, i_2, i_3, \ldots i_p$ система чиселъ, выбранная изъ ряда чиселъ $1, 2, \ldots q$. Всѣхъ слагаемыхъ въ суммѣ (15) будетъ q^p, т. е. столько, сколько возможно размѣщенiй изъ q номеровъ по p въ группѣ (съ повторенiями).

Если $p=q$, то ясно, что опредѣлитель (14) есть произведенiе двухъ опредѣлителей $| a_{ik} |$ и $| b_{ik} |$. Пусть далѣе $p>q$, тогда въ каждой комбинацiи $i_1, i_2, i_3, \ldots i_p$ будутъ входить непремѣнно по два или болѣе одинаковыхъ номеровъ, а въ такомъ случаѣ всѣ опредѣлители, входящiе въ сумму (15) будутъ нули, ибо они будутъ имѣть по крайней мѣрѣ по два одинаковыхъ столбца. Итакъ, если $p>q$, то опредѣлитель $| c_{ik} |$ равенъ нулю.

Предположимъ, наконецъ, что $p<q$. Всего опредѣлителей будетъ

$$\begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \ldots & a_{1i_p} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \ldots & a_{2i_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{pi_1} & a_{pi_2} & \ldots & a_{pi_p} \end{vmatrix} \qquad (16)$$

q^p, но всѣ тѣ, у которыхъ два или болѣе столбцовъ одинаковы, пропадаютъ; слѣдовательно, на мѣста $i_1, i_2, \ldots i_p$ надо изъ чиселъ ряда $1, 2, \ldots q$ ставить одновременно только различные номера, слѣдовательно такихъ комбинацiй будетъ A^p_q. Таково будетъ число опредѣлителей (16), отличныхъ отъ нуля. Выберемъ въ суммѣ (15) такiя слагаемыя, которыя содержатъ опредѣлитель (16) съ тѣми же самыми значенiями индексовъ $i_1, i_2, \ldots i_p$, но различно располо-

женными. Такихъ слагаемыхъ будетъ, очевидно, $p!$ и сумма ихъ представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Sigma'(-1)^{[i_1\, i_2\, .\, .\, i_p]} \, b_{i_1 1}\, b_{i_2 2} \dots b_{i_p p} \cdot (-1)^{[i_1\, i_2\, .\, .\, i_p]} \cdot \begin{vmatrix} a_{1i_1}, & a_{1i_2}, & \dots & a_{1i_p} \\ a_{2i_1}, & a_{2i_2}, & \dots & a_{2i_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{pi_1} & a_{pi_2}, & \dots & a_{pi_p} \end{vmatrix} \quad (17)$$

эта сумма распространяется на всѣ $p!$ перестановокъ значковъ $i_1, i_2, i_3, \dots i_p$, а потому она будетъ равна произведенію двухъ опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} b_{i_1 1}, & b_{i_1 2}, & \dots & b_{i_1 p} \\ b_{i_2 1}, & b_{i_2 2}, & \dots & b_{i_2 p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_p 1}, & b_{i_p 2}, & \dots & b_{i_p p} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1i_1}, & a_{1i_2}, & \dots & a_{1i_p} \\ a_{2i_1}, & a_{2i_2}, & \dots & a_{2i_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{pi_1} & a_{pi_2}, & \dots & a_{pi_p} \end{vmatrix} \quad (18).$$

Сумма (15) распадается на C_q^p группъ по $p!$ слагаемыхъ, отличныхъ отъ нуля, каждая изъ этихъ группъ, какъ мы видѣли, можетъ быть представлена въ видѣ произведенія двухъ опредѣлителей (18). Итакъ, опредѣлитель $|\,c_{ik}\,|$ въ случаѣ $p<q$ равенъ суммѣ C^p_q произведеній вида (18).

Примѣръ 1.

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 & a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1 + b_1\beta_2 & a_2\beta_1 + b_2\alpha_2 \end{Vmatrix}$$

Опредѣлитель 2-го порядка, составленный изъ квадратной матрицы въ первой части равенъ, очевидно, произведенію опредѣлителей, составленныхъ изъ матрицъ лѣвой части.

Примѣръ 2.

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1, & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \end{Vmatrix}$$

Этотъ примѣръ соотвѣтствуетъ случаю $p<q$. Поэтому:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1, & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Примемъ, что

$a_1 = \alpha_1 = x_1 \quad a_2 = \alpha_2 = x_2$
$b_1 = \beta_1 = y_1 \quad b_2 = \beta_3 = y_2$
$c_1 = \gamma_1 = z_1 \quad c_2 = \gamma_2 = z_2$, тогда предыдущее соотношеніе намъ дастъ:

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2$$

это извѣстное тождество (Лапласа), которымъ часто приходится пользоваться въ аналитической геометріи.

Примѣръ 3. Нижеслѣдующій примѣръ соотвѣтствуетъ случаю $p > q$

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{Vmatrix}, \text{ тогда}$$

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2, & a_1\beta_1 + b_1\beta_2, & a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2, & a_2\beta_1 + b_2\alpha_2, & a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2 \\ a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2, & a_3\beta_1 + b_3\beta_2, & a_3\gamma_1 + b_3\gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Глава VIII.

Линейныя уравненія.

1, **Линейная неоднородная система, конечныя рѣшенія.** Пусть у насъ имѣется система n неоднородныхъ уравненій, содержащихъ n неизвѣстныхъ $x_1\ x_2, \ldots x_n$:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots\ldots a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \qquad (1)$$

Будемъ обозначать опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ, черезъ $\Delta = | a_{ik} |$, его адъюнкты перваго порядка, соотвѣтствующіе элементу a_{ik}, черезъ A_{ik}. Для опредѣленія какого-нибудь неизвѣстнаго x_k умножимъ первое уравненіе на A_{1k}, второе на $A_{2k}, \ldots$ послѣднее на A_{nk} и затѣмъ сложимъ ихъ. Тогда коэффиціентомъ при x_k будетъ сумма:

$$a_{1k}A_{ik} + a_{2k} + A_{2k} \ldots a_{kn}A_{nk}, \qquad (2)$$

т.-е. опредѣлитель Δ; коэффиціенгъ при какомъ-либо другомъ неизвѣстномъ x_h будетъ:

$$a_{1h}A_{1k} + a_{2h}A_{2k} + \ldots + a_{nh}A_{nk},$$

т.-е. нуль. Такимъ образомъ, мы этимъ способомъ исключаемъ изъ данной системы всѣ неизвѣстныя, кромѣ x_k, послѣднее опредѣляется въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Delta \,.\, x_k = b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \ldots + b_n A_{nk}. \qquad (3)$$

Правая часть равенства (3) получается изъ суммы (2), т.-е. опредѣлителя Δ замѣной элементовъ столбца k соотвѣтствующими свободными членами нашихъ уравненій, будемъ ее обозначать черезъ Δ_k. Такъ что:

$$\Delta \,.\, x_k = \Delta_k \qquad (4)$$

Итакъ, если опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ въ данной системѣ уравненій, отличенъ отъ нуля, то рѣшеніе этихъ уравненій представляется въ слѣдующей формѣ:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \qquad (5)$$

гдѣ Δ — опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ, Δ_k — опредѣлитель, полученный изъ Δ замѣной элементовъ столбца k свободными членами данныхъ уравненій. Отмѣтимъ при этомъ, что свободные члены мы писали въ правой части каждаго уравненія.

Примѣръ. Пусть намъ дана система:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= -3 \\ 2x + 3y + 4z + u &= 5 \\ 3x + 4y + z + 2u &= -3 \\ 4x + y + 2z + 3u &= 1 \end{aligned}$$

тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 160.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 10. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 160.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -16)$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1, \text{ и т. д.}$$

2. Безконечныя рѣшенія. Конечное опредѣленное значеніе для x_k, мы вывели изъ уравненія (4) въ предположеніи, что $\Delta \neq 0$. Если же теперь опредѣлитель Δ обращается въ нуль, но при этомъ Δ_k отлично отъ нуля (при всякомъ k), тогда уравненія вида (4) не могутъ удовлетворяться никакими конечными значеніями неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Въ этомъ случаѣ будемъ говорить, что наша система (1) имѣетъ только безконечныя рѣшенія.

3. Неопредѣленныя рѣшенія. Допустимъ, наконецъ, что Δ и какой-нибудь опредѣлитель Δ_k (при опредѣленномъ значеніи индекса k) обращаются въ нули. Тогда уравненіе (4) выполняется тождественно при всякомъ значеніи x_k, изъ него уже нельзя опредѣлить это неизвѣстное. При указанныхъ условіяхъ и Δ_i при любомъ значеніи номера i обращается въ нуль, т. е. значенія всѣхъ неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ будутъ неопредѣленны.

Если опредѣлитель Δ будетъ ранга $p < n-1$, то всѣ его подопредѣлители порядка $n-1$ обращаются въ нули, слѣдовательно, разложивъ Δ_k (при любомъ значеніи k) по элементамъ столбца k, мы получимъ, что этотъ опредѣлитель тождественно равенъ нулю.

Если же Δ имѣетъ рангъ $p=n-1$, то Δ_h обращается въ нуль при условіи, что:

$$\Delta = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_k = 0,$$

въ силу предложенія, доказаннаго въ § 6 главы VII-й. (6)

Итакъ, если каждый изъ двухъ опредѣлителей (6) равенъ нулю, то и всякій $\Delta_h = 0$; система уравненіи (1) неопредѣленна. Съ какой степенью произвола разрѣшается система (1) мы разъяснимъ позднѣе, теперь же лишь замѣтимъ, что неопредѣленность рѣшенія происходитъ отъ того, что по крайней мѣрѣ одно изъ уравненій этой системы является слѣдствіемъ остальныхъ уравненій.

4. Линейная неоднородная система. Общій случай. Пусть у насъ имѣется m линейныхъ функцій съ n неизвѣстными $x_1\ x_2, \ldots x_n$:

$$\begin{array}{l} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{array} \qquad (7)$$

Систему m данныхъ неоднородныхъ уравненій мы представимъ тогда въ слѣдующемъ видѣ:

$$f_1 = b_1,\ f_2 = b_2,\ \ldots\ .\ f_m = b_m. \tag{8}$$

Обозначимъ черезъ A или черезъ $(m,\ n)$ матрицу, составленную изъ коэффиціентовъ уравненій при неизвѣстныхъ:

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

и черезъ A° или $(m,\ n+1)$ матрицу изъ этихъ же коэффиціентовъ съ присоединеніемъ столбца свободныхъ членовъ уравненій:

$$A^\circ \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n}, & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn} & b_n \end{vmatrix} \tag{10}$$

Пусть рангъ матрицы A будетъ p и

$$A_p = \begin{vmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots p \\ 1\ 2\ 3 \ldots p \end{vmatrix} \tag{11}$$

одинъ изъ ея опредѣлителей порядка p, отличный отъ нуля; этотъ опредѣлитель мы обозначили, согласно прежнему условію (глава I § 4), выписывая номера строкъ и столбцовъ. Составимъ опредѣлитель:

$$F^k_{p+1} \equiv \begin{vmatrix} f_k, & a_{k_1}, & a_{k_2}, & \ldots & a_{kp} \\ f_1, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1p} \\ f_2, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_p, & a_{p_1}, & a_{p_2}, & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \tag{12}$$

и разложимъ его въ сумму опредѣлителей по слагаемымъ перваго столбца:

$$F^k_{p+1} \equiv x_1 \begin{vmatrix} a_{k_1}, & a_{k_1}, & a_{k_2}, & \ldots & a_{kp} \\ a_{11}, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1p} \\ a_{21}, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p_1}, & a_{p_1}, & a_{p_2}, & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} + \ldots + x_p \begin{vmatrix} a_{kp}, & a_{k_1}, & a_{k_2}, & \ldots & a_{kp} \\ a_{1p}, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1p} \\ a_{2p}, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{pp}, & a_{p_1}, & a_{p_2}, & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} +$$

$$+ x_{p+1} \begin{vmatrix} a_{kp+1}, & a_{k1}, & a_{k2}, & \ldots & a_{kp} \\ a_{1p+1}, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1p} \\ a_{2p+1}, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{pp+1}, & a_{p1}, & a_{p2}, & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} + \ldots + x_n \begin{vmatrix} a_{kn}, & a_{k1}, & a_{k2}, & \ldots & a_{kp} \\ a_{1n}, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1p} \\ a_{2n}, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{pn}, & a_{p1}, & a_{p2}, & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \tag{13}$$

Коэффиціенты при $x_1, x_2, \ldots x_p$, обращаются въ нули, какъ опредѣлители, имѣющіе по два одинаковыхъ столбца, коэффиціенты при остальныхъ неизвѣстныхъ тоже нули, какъ опредѣлители порядка $p+1$, принадлежащіе матрицѣ A ранга p. Итакъ F_{p+1}^k тождественно, т. е. при всякихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ равенъ нулю. Разложимъ теперь этотъ опредѣлитель по элементамъ перваго столбца:

$$f_k \Delta_p + f_1 \Delta_1^k + f_2 \Delta_2^k + \ldots + f_p \Delta_p^k = 0 \quad (14).$$
$$k = p+1,\ p+2, \ldots m.$$

Такъ какъ $\Delta_p \neq 0$, то это соотношеніе разрѣшимо относительно функціи f_k. Итакъ, если рангъ матрицы A есть p, то $m-p$ функцій f_k будутъ линейными выраженіями остальныхъ p функцій, иначе говоря, первыя будутъ линейно зависимы отъ послѣднихъ.

5. Необходимое условіе разрѣшимости. Отсюда слѣдуетъ, что если система (8) удовлетворяется конечными значеніями $x_1, x_2, \ldots x_n$, то свободные члены уравненій $b_1, b_2, \ldots b_m$ не могутъ быть выбраны произвольно (при любомъ рангѣ p матрицы A); въ самомъ дѣлѣ, если существуетъ конечная система значеній $x_1, x_1, \ldots x_n$, удовлетворяющихъ уравненіемъ (8), то, подставивъ эти значенія въ тождественное соотношеніе (14), мы получимъ:

$$b_k \Delta_p + b_1 \Delta_1^k + b_2 \Delta_2^k + \ldots + b_p \Delta_p^k = 0 \quad (15)$$
$$k = p+1;\ p+2 \ldots m,$$

т. е. между свободными членами $b_1, b_2, \ldots b_m$ существуютъ тѣ же линейныя соотношенія, какъ и между функціями $f_1, f_2, \ldots f_m$. Таково условіе, необходимое для разрѣшенія въ конечномъ видѣ системы (8).

6. Достаточное условіе разрѣшимости. Нетрудно показать, что оно и достаточно. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что рангъ матрицы A равенъ p, слѣдовательно, $m-p$ функцій $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots f_m$ являются линейными комбинаціями p функцій $f_1, f_2, \ldots f_p$, пусть далѣе $b_{p+1}, b_{p+2}, \ldots, b_m$ связаны тѣми же линейными соотношеніями (15), какъ и соотвѣтствующія имъ функціи f_k. Вычтемъ теперь изъ равенства (14) почленно равенство (15):

$$(f_k - b_k)\Delta_p + (f_1 - b_1)\Delta_1^k + (f_2 - b_2)\Delta_2^k + \ldots + (f_p - b_p)\Delta_p^k = 0 \quad (16)$$
$$k = p+1,\ p+2, \ldots m.$$

Это тождественное (относительно $x_1, x_2, \ldots x_n$) соотношеніе разрѣшимо относительно f_k. Если теперь $x_1, x_2, \ldots x_n$ подобраны такъ, что они удовлетворяютъ p первымъ уравненіямъ изъ системы (8), то (16) показываетъ, что будутъ удовлетворены и остальныя $m-p$ уравненій этой системы.

7. Рѣшеніе общей системы. Уравненіямъ же:

$$f_1 = b_1,\ f_2 = b_2, \ldots f_p = b_p \quad (17)$$

можно удовлетворить слѣдующимъ образомъ. Перенесемъ въ нихъ въ правую часть неизвѣстныя $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots x_n$:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 - a_{1p+1}x_{p+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 - a_{2p+1}x_{p+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pp}x_p = b_p - a_{pp+1}x_{p+1} - \ldots - a_{pn}x_n
\end{array} \qquad (18)
$$

О предѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_p$ есть Δ_p, который по условію, отличенъ отъ нуля, а потому (§ 1 этой главы) система (18) въ конечномъ, опредѣленномъ видѣ разрѣшима относительно $x_1, x_2 \ldots x_p$; выраженія этихъ последнихъ будутъ содержать $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots x_n$, которые остаются произвольными. Удовлетворивъ, такимъ образомъ, уравненіямъ (17), мы тѣмъ самымъ, какъ было доказано, удовлетворимъ и остальнымъ $m-p$ уравненіямъ системы (8).

8. Другая форма необходимаго и достаточнаго условія. Условіе, которое мы получили для разрѣшимости системы (8), можно представить въ иной формѣ. Изъ предыдущихъ разсужденій легко было бы обнаружить, что въ матрицѣ A^0 элементы какой-либо строки являются опредѣленной линейной комбинаціей соотвѣтствующихъ элементовъ p первыхъ строкъ, отсюда, далѣе, нетрудно вывести, что всѣ опредѣлители порядка $p+1$ изъ матрицы A^0 суть нули, т.-е. *ея рангъ будетъ равенъ рангу матрицы A*. Не будемъ подробнѣе развивать эти соображенія, а дадимъ новое, независимое отъ предыдущаго, обоснованіе этой формы условія.

Рангъ матрицы A^0 не можетъ быть менѣе p ранга ея части. Покажемъ, что онъ не можетъ быть и болѣе p, т.-е. всѣ опредѣлители порядка $p+1$ матрицы A^0 обращаются въ нули.

Пусть $k_1, k_2, \ldots k_p$ какіе-нибудь индексы изъ ряда 1, 2, 3, n, а $i_1, i_2 \ldots i_p+1$ — индексы изъ ряда $1, 2, 3, \ldots m$; составимъ опредѣлитель

$$
\begin{vmatrix}
f_{i_1}, & a_{i_1k_1}, & a_{i_1k_2}, & \ldots & a_{i_1k_p} \\
f_{i_2}, & a_{i_2k_1}, & a_{i_2k_2}, & \ldots & a_{i_2k_p} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
f_{i_{p+1}}, & a_{i_{p+1}k_1}, & a_{i_{p+1}k_2}, & \ldots & a_{i_{p+1}k_p}
\end{vmatrix} \qquad (19)
$$

Разложимъ его, подобно опредѣлителю (12), въ сумму опредѣлителей по слагаемымъ перваго столбца; коэффиціенты при всѣхъ неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ будутъ нули, какъ опредѣлители порядка $p+1$ изъ матрицы A ранга p. Слѣдовательно, опредѣлитель (19) тождественно, при всякихъ значеніяхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, равенъ нулю. Пусть теперь $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ выбраны такъ, что система (8) удовлетворена; подставляя въ (19) вмѣсто f равное ей при этомъ условіи число b_i, мы получимъ:

$$\begin{vmatrix} b_{i_1}, & a_{i_1k_1}, & a_{i_1k_2}, & \ldots & a_{i_1k_p} \\ b_{i_2}, & a_{i_2k_1}, & a_{i_2k_2}, & \ldots & a_{i_2k_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i_{p+1}}, & a_{i_{p+1}k_1}, & a_{i_{p+1}k_2}, & \ldots & a_{i_{p+i}k_p} \end{vmatrix} = 0. \qquad (20)$$

Всякій опредѣлитель порядка $p+1$ изъ матрицы A^0, содержащій элементы послѣдняго ея столбца, равенъ нулю; другіе же опредѣлители порядка $p+1$ этой матрицы—тоже нули въ силу принадлежности ихъ матрицѣ A. Рангъ матрицы A^0 не можетъ быть и болѣе p, слѣдовательно, онъ равенъ p. Чтобы данная система (8) имѣла конечныя рѣшенія, необходимо, чтобы рангъ матрицъ A и A^0 былъ одинаковымъ. Остается показать достаточность этого условія. Разсмотримъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} f_k - b_k, & a_{k_1}, & a_{k_2}, & \ldots & a_{k_p} \\ f_1 - b_1, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1p} \\ f_2 - b_2, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_p - b_p, & a_{p1}, & a_{p2}, & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \qquad (21)$$

$$k = p+1,\ p+2, \ldots m,$$

этотъ опредѣлитель тождественно обращается въ нуль, ибо онъ отъ опредѣлителя (12) отличается только свободнымъ членомъ (независящимъ отъ $x_1, x_2, \ldots x_n$), который въ силу условія (20) тоже нуль.

Разлагая этотъ опредѣлитель по элементамъ перваго столбца, мы, очевидно, получимъ соотношеніе (16), которое показываетъ, что удовлетворяя p первымъ уравненіямъ системы (8), мы удовлетворимъ и всѣмъ остальнымъ.

Итакъ, условіе необходимое и достаточное для разрѣшимости системы (8) въ конечномъ и опредѣленномъ видѣ таково: рангъ матрицы (A), составленной изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ, не долженъ измѣняться отъ присоединенія къ матрицѣ столбца свободныхъ членовъ уравненій.

Примѣръ. Разсмотримъ систему уравненій

$$\begin{aligned} x+2y+3z+4u &= -3 \\ x+4y+9z+16u &= -17 \\ x+3y+6z+10u &= -10 \end{aligned}$$

рангъ матрицы, составленной изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ:

$$A = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 1, & 4, & 9, & 16 \\ 1, & 3, & 6, & 10 \end{vmatrix}$$

равенъ 2; если присоединить къ ней столбецъ свободныхъ членовъ:

$$A^\circ = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & -3 \\ 1, & 4, & 9, & 16, & -17 \\ 1: & 3, & 6, & 10, & -10 \end{vmatrix}$$

рангъ останется прежнимъ. Наша система удовлетворится, если удовлетворить первымъ двумъ уравненіямъ. Третье уравненіе системы является слѣдствіемъ двухъ первыхъ.

9. Однородная система. Простѣйшій случай. Если данная система уравненій однородна относительно неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, то изъ нея можно опредѣлять только $n-1$ отношеній $n-1$ неизвѣстныхъ кь какому-нибудь одному изъ нихъ; поэтому линейная однородная система не должна содержать болѣе $n-1$ независимыхъ между собой уравненій. Положимъ, сначала, наша система содержитъ какъ разъ $n-1$ уравненій:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots f_{n-1} = 0 \tag{22}$$

и притомъ матрица, составленная изъ коэффиціентовъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \ldots & a_{n-1\,n} \end{vmatrix} \tag{23}$$

будетъ ранга $n-1$. Допустимъ, что

$$\theta_n = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots & n-1 \\ 1, & 2, & 3, & \ldots & n-1 \end{vmatrix}$$

есть опредѣлитель порядка $n-1$ изъ матрицы (23), который не равенъ нулю. Перенесемъ тогда въ уравненіяхъ (22) неизвѣстное x_n въ правую часть и будемъ рѣшать уравненія.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} = -a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n-1}x_{n-1} = -a_{2n}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n-1,1}x + a_{n-1\,2}x_2 + \ldots + a_{n-1\,n-1}x_{n-1} = -a_{n-1,n}x_n \end{array} \tag{22'}$$

относительно $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Будемъ въ дальнѣйшемъ обозначать через θ_k тотъ опредѣлитель порядка $n-1$, который получается изъ матрицы (23) пропускомъ столбца номера k Рѣшеніе уравненій (22') по формулѣ (5) этой главы представится такъ:

$$x_k \cdot \theta_n = -x_n \cdot |\ 1, 2, \ldots k-1, n, k+1, \ldots n-1\ | \tag{24}$$

Здѣсь въ правой части опредѣлитель мы обозначили только номерами столбцовъ, переставляя ихъ найдемъ:

$$x_k \cdot \theta_n = (-1)^{n-k} \cdot \theta_k x_n$$

или, наконецъ, въ видѣ пропорціи:

$$\frac{x_k}{(-1)^k \cdot \theta_k} = \frac{x_n}{(-1)^n \cdot \theta_n} \qquad k = 1, 2, \ldots n-1. \tag{25}$$

Этому рѣшенію можно дать слѣдующую интересную форму: прибавимъ къ матрицѣ (23) лишнюю строку $a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nn}$; тогда изъ полученной новой квадратной матрицы составимъ опредѣлитель $A = | a_{ik} |$, нетрудно теперь видѣть, что Θ_k есть миноръ M_{nk}, и формула (25) перепишется такъ:

$$\frac{x_k}{(-1)^k M_{nk}} = \frac{x_n}{(-1)^n M_{nn}}$$

или, наконецъ,

$$\frac{x_k}{A_{nk}} = \frac{x_n}{A_{nn}} \qquad k = 1, 2, \ldots n-1. \qquad (26)$$

Само собой разумѣется, эти послѣднія отношенія не содержатъ элементовъ прибавленной къ матрицѣ строки.

10. Однородная система. Общій случай. Переходя къ общему случаю однородной линейной системы, предположимъ, что она содержитъ m уравненій. Необходимое и достаточное условіе, которое мы получили для возможности разрѣшенія вообще линейной системы, здѣсь непремѣнно выполняется: матрицы A и A° будутъ имѣть одинаковый рангъ, ибо вторая отличается отъ первой однимъ столбцомъ, всѣ элементы котораго суть нули (свободные члены уравненій). Если рангъ матрицы A будетъ равенъ $p (p < n)$, то система

$$f_1 = 0, \ f_2 = 0, \ f_3 = 0, \ldots f_m = 0 \qquad (27)$$

будетъ содержать p независимыхъ между собой уравненій, пусть это будутъ уравненія:

$$f_1 = 0, \ f_2 = 0, \ldots f_p = 0, \qquad (28)$$

Остальныя $m-p$ уравненій системы (27) будутъ слѣдствіями этихъ p уравненій. Если въ уравненіяхъ (28) мы перенесемъ въ правую часть всѣ неизвѣстныя, кромѣ первыхъ p, то они примутъ видъ:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = -a_{1p+1}x_{p+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = -a_{2p+1}x_{p+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pp}x_p = -a_{pp+1}x_{p+1} - \ldots - a_{pn}x_n \end{array}\right\} \qquad (28')$$

Опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ a_{ik}, входящихъ въ лѣвыя части этихъ уравненій, по предположенію отличенъ отъ нуля, а потому система разрѣшима относительно $x_1, x_2, \ldots x_p$. Рѣшенія будутъ содержать величины $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots x_n$, которыя остаются произвольными. Такимъ образомъ, однородная система уравненій (27) при рангѣ матрицы A равномъ $p (p < n)$ будетъ имѣть безчисленное множество рѣшеній.

11. Исключеніе неизвѣстныхъ изъ однородной системы уравненій. Пусть у насъ имѣется n однородныхъ уравненій 1-ой степени съ n неизвѣстными:

$$f_1 = 0, \ f_2 = 0, \ldots f_n = 0; \qquad (29)$$

Составимъ изъ коэффиціентовъ a_{ik} при неизвѣстныхъ опредѣлитель $A = | a_{ik} |$; умноживъ теперь уравненія соотвѣтственно на адъюнкты элементовъ перваго столбца этого опредѣлителя, сложимъ ихъ:

$$A_{11} \cdot f_1 + A_{21} \cdot f_2 + \ldots + A_{n1} \cdot f_n = 0$$

развернувъ лѣвую часть, мы найдемъ, что всѣ неизвѣстныя, кромѣ x_1, пропадаютъ, и остается:

$$x_1 \cdot A = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если система (29) имѣетъ рѣшенія, отличныя отъ нуля, то необходимо, чтобы опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ, былъ равенъ нулю. Умножая данныя уравненія на адъюнкты и складывая ихъ, мы исключили изъ уравненій всѣ неизвѣстныя кромѣ x_1, это послѣднее неизвѣстное также выпадаетъ, если $A = 0$.
Итакъ

$$A = 0$$

есть результатъ исключенія неизвѣстныхъ изъ n однородныхъ линейныхъ уравненій (29).

12. Исключеніе неизвѣстныхъ изъ неоднородной линейной системы. Возьмемъ теперь систему $n+1$ линейныхъ неоднородныхъ уравненій съ n неизвѣстными:

$$f_1 = b_1, \; f_2 = b_2, \ldots f_{n+1} = b_{n+1} \tag{30}$$

и допустимъ, что эта система совмѣстна и удовлетворяется нѣкоторыми конечными опредѣленными значеніями неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Ее можно легко преобразовать въ однородную систему, если каждое x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ замѣнить черезъ $-\frac{x_1}{x_{n+1}}$; тогда система (30) приметъ видъ

$$\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \ldots & +a_{1n}x_n & +b_1x_{n+1} & =0 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + \ldots & +a_{2n}x_n & +b_2x_{n+1} & =0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & + \ldots & +a_{nn}x_n & +b_nx_{n+1} & =0 \\
a_{n+1,1}x_1 & +a_{n+1,2}x_2 & + \ldots & +a_{n+1,n}x_n & +b_{n+1}x_{n+1} & =0
\end{array}$$

Согласно предыдущему результатъ исключенія всѣхъ неизвѣстныхъ изъ этой однородной системы будетъ:

$$\begin{vmatrix}
a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n}, & b_1 \\
a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n}, & b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn}, & b_n \\
a_{n+1,1n} & a_{n+1,2}, & \ldots & a_{n+1,n}, & b_{n+1}
\end{vmatrix} = 0$$

вмѣстѣ съ тѣмъ это есть, слѣдовательно, результатъ исключенія неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ изъ $n+1$ неоднородныхъ уравненій (30).

или, что то же самое, это есть условіе совмѣстности этихъ уравненій.

13. Зависимыя и независимыя системы линейныхъ однородныхъ функцій. Пусть намъ даны m линейныхъ однородныхъ функцій f_1, $f_2, \ldots f_m$, содержащихъ n неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, такъ что:

$$f_i \equiv a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

Эти функціи называются линейно-независимыми, если соотношеніе

$$k_1f_1 + k_2f_2 + \ldots + k_mf_m \equiv 0 \qquad (31)$$

не можетъ удовлетворяться тождественно (т.-е. при всякихъ значеніяхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$) ни при какихъ значеніяхъ постоянныхъ $k_1, k_2, \ldots k_m$, кромѣ случая, когда всѣ эти постоянныя обращаются въ нули. Если соотношеніе (31) удовлетворяется въ томъ случаѣ, когда всѣ $k_1, k_2, \ldots k_m$ одновременно не обращаются въ нуль, то система функцій $f_1, f_2 \ldots f_m$ называется линейно-зависимой системой. Посмотримъ, при какихъ условіяхъ система данныхъ функцій будетъ имѣть тотъ или иной характеръ. Чтобы соотношеніе (31) выполнялось тождественно относительно неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, необходимо, чтобы коэффиціенты при каждомъ x_i въ лѣвой части этого соотношенія были равны нулю; это даетъ намъ слѣдующую систему однородныхъ уравненій:

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \ldots + a_{m1}k_m &= 0 \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{m2}k_m &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \ldots + a_{mn}k_m &= 0 \end{aligned} \qquad (32)$$

Составимъ матрицу $A = \| a_{ik} \|$ изъ коэффиціентовъ a_{ik} этихъ уравненій, вмѣстѣ съ тѣмъ это будутъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ въ данной системѣ функцій $f_1, f_2, \ldots f_m$. Вопросъ о зависимости или независимости данныхъ функцій приводится такимъ образомъ къ вопросу, имѣетъ ли система (32) для неизвѣстныхъ $k_1, k_2, \ldots k_m$ рѣшенія отличныя отъ нуля или нѣтъ. Предположимъ сначала, что $m = n$, тогда система (32) не имѣетъ рѣшеній отличныхъ отъ нуля, если $A = | a_{ik} |$ отличенъ отъ нуля; система будетъ имѣть рѣшенія отличныя отъ нуля, если $A = 0$. Въ первомъ случаѣ система данныхъ функцій $f_1, f_2, \ldots f_m$ будетъ линейно-независимой, во второмъ—зависимой.

Если $m > n$, т.-е. число неизвѣстныхъ $k_1, k_2, \ldots k_m$ больше числа уравненій, система (32) имѣетъ безчисленное множество рѣшеній. Соотношеніе (31) будетъ тождественно удовлетворяться при различныхъ системахъ значеній постоянныхъ $k_1, k_2, \ldots k_m$. Система функцій $f_1, f_2, \ldots f_m$ будетъ безусловно линейно-зависимой системой.

Предположимъ, наконецъ, что $m < n$, т.-е. число функцій менѣе числа перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Въ этомъ случаѣ все дѣло бу-

детъ въ рангѣ матрицы $A=\| a_{ik} \|$: если рангъ этой матрицы равенъ m (т.-е. числу неизвѣстныхъ $k_1, k_2, \dots k_m$) система уравненій (32) не имѣетъ другихъ рѣшеній, кромѣ какъ $k_i=0$ ($i=1, 2, \dots m$); если же рангъ матрицы A окажется менѣе m, то система (32) будетъ имѣть безчисленное множество рѣшеній отличныхъ отъ нуля.

Итакъ, если число функцій менѣе числа перемѣнныхъ, то эти функціи будутъ линейно-независимы въ томъ лишь случаѣ, когда рангъ матрицы, составленной изъ коэффиціентовъ, будетъ равенъ числу функцій.

Примѣръ 1. Система функцій

$$\begin{aligned} f_1 &= -x_1+x_2+x_3 \\ f_2 &= x_1-x_2+x_3 \\ f_3 &= x_1+x_2-x_3 \end{aligned}$$

будетъ системой линейно-независимой, ибо опредѣлитель изъ коэффиціентовъ

$$\begin{vmatrix} -1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 1 \\ 1, & 1, & -1 \end{vmatrix} = 4$$

отличенъ отъ нуля.

Примѣръ 2. Система функцій

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1+2x_2+3x_3 \\ f_2 &= 3x_1+2x_2+x_3 \\ f_3 &= -3x_1+2x_2+7x_3 \end{aligned}$$

будетъ линейно-зависимой; опредѣлитель изъ коэффиціентовъ обращается въ нуль

$$\begin{vmatrix} 1 & 2, & 3 \\ 3 & 2, & 1 \\ -3 & 2, & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Примѣръ 3. Система функцій:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1+x_2+x_3 \\ f_2 &= x_1-x_2+x_3 \\ f_3 &= x_1+x_2-x_3 \\ f_4 &= -x_1+x_2+x_3 \end{aligned}$$

будетъ линейно-зависимой, ибо число функцій больше числа перемѣнныхъ.

Примѣръ 4. Система функцій:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1+x_2+x_3+x_4 \\ f_2 &= x_1-x_2+x_3+x_4 \\ f_1 &= x_1+x_2-x_3+x_4 \end{aligned}$$

будетъ линейно-независимой.

Примѣръ 5. Система функцій:

$$f_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$$
$$f_2 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5$$
$$f_3 = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5$$
$$f_4 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad + 6x_5$$

будетъ линейно-зависимой системой.

Глава IX.

Особые опредѣлители.

1. Симметрическіе опредѣлители. Опредѣлитель $A = |a_{ik}|$ называется симметрическимъ, если его элементы удовлетворяютъ условіямъ:

$$a_{ik} = a_{ki}; \tag{1}$$

это условіе обозначаетъ, что два элемента опредѣлителя равны, если они расположены симметрично относительно главной діагонали, короче говоря, весь опредѣлитель симметриченъ по отношенію къ своей главной діагонали. Отсюда сейчасъ же слѣдуетъ, что *транспонированный симметричный опредѣлитель тождественъ съ начальнымъ*. Два элемента a_{ik} и a_{ki} будемъ вообще называть сопряженными и разсмотримъ соотвѣтствующіе имъ миноры M_{ik} и M_{ki}; легко видѣть, что миноръ M_{ki} исходнаго опредѣлителя будетъ миноромъ M_{ik} транспонированнаго опредѣлителя. Но, такъ какъ транспонированіе симметричнаго опредѣлителя не мѣняетъ его вида, то отсюда слѣдуетъ:

$$M_{ki} = M'_{ik} = M_{ik}, \tag{2}$$

умноживъ эти равенства на $(-1)^{i+k}$, найдемъ далѣе:

$$A_{ik} = A_{ki} \tag{2'}$$

Итакъ, въ симметричномъ опредѣлителѣ адъюнкты (миноры) сопряженныхъ элементовъ равны между собой. Равенство (2') показываетъ, между прочимъ, что опредѣлитель $|A_{ik}|$ т.-е. сопряженный данному симметричному опредѣлителю будетъ также симметричнымъ.

Составимъ квадратъ симметричнаго опредѣлителя:

$$A^2 = C = |c_{ik}| \tag{3}$$

причемъ здѣсь (глава V).

$$c_{ik} = \sum_h a_{hk}\, a_{ik}, \tag{4}$$

и возьмемъ теперь какой-нибудь главный миноръ опредѣлителя C, напримѣръ:

$$\begin{vmatrix} p_1, p_2, \ldots, p_k \\ p_1, p_2, \ldots, p_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{p_1p_1} & c_{p_1p_2} & c_{p_1p_3} & \ldots & c_{p_1p_k} \\ c_{p_2p_1} & c_{p_2p_2} & c_{p_2p_3} & \ldots & c_{p_2p_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{p_kp_1} & c_{p_kp_2} & c_{p_kp_3} & \ldots & c_{p_kp_k} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Этотъ опредѣлитель будетъ опредѣлителемъ «составленнымъ» (глава VII, § 7) изъ двухъ матрицъ:

$$\begin{Vmatrix} a_{p_11} & a_{p_12} & \ldots & a_{p_1n} \\ a_{p_21} & a_{p_22} & \ldots & a_{p_2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p_k1} & a_{p_k2} & \ldots & a_{p_kn} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{1p_1} & a_{1p_2} & \ldots & a_{1p_k} \\ a_{2p_1} & a_{2p_2} & \ldots & a_{2p_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{np_1} & a_{np_2} & \ldots & a_{np_k} \end{Vmatrix},$$

а потому (ibidem) онъ равенъ суммѣ произведенiй вида:

$$\begin{vmatrix} a_{p_1i_1} & a_{p_1i_2} & \ldots & a_{p_1i_k} \\ a_{p_2i_1} & a_{p_2i_2} & \ldots & a_{p_2i_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p_ki_1} & a_{p_ki_2} & \ldots & a_{p_ki_k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i_1p_1} & a_{i_1p_2} & \ldots & a_{i_1p_k} \\ a_{i_2p_1} & a_{i_2p_2} & \ldots & a_{i_2p_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_kp_1} & a_{i_kp_2} & \ldots & a_{i_kp_k} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Но въ произведенiи (6) второй множитель въ силу симметричности начальнаго опредѣлителя A тождественъ съ первымъ множителемъ: второй множитель получается транспонированiемъ перваго. Такимъ образомъ опредѣлитель (5) можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ.

$$\begin{vmatrix} p_1 \, p_2 \ldots p_k \\ p_1 \, p_2 \ldots p_k \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} a_{p_1i_1} & a_{p_1i_2} & \ldots & a_{p_1i_k} \\ a_{p_2i_1} & a_{p_2i_2} & \ldots & a_{p_2i_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p_ki_1} & a_{p_ki_2} & \ldots & a_{p_ki_k} \end{vmatrix}^2, \qquad (7)$$

гдѣ сумма распространяется на всевозможныя комбинацiи значенiй индексовъ $i_1, i_2, \ldots i_k$, выбираемыхъ изъ ряда $1, 2, 3, \ldots n$. Итакъ, мы можемъ сказать: *всякiй главный миноръ опредѣлителя C (квадрата симметричнаго опредѣлителя) разлагается въ сумму квадратовъ.* Этимъ свойствомъ мы воспользуемся ниже при изслѣдованiи одного важнаго уравненiя.

2. Вѣковое уравненiе. Пусть $A = [a_{ik}]$ будетъ симметрическимъ опредѣлителемъ, тогда уравненiе:

$$f(x)\equiv\begin{vmatrix} a_{11}+x, & a_{12} & , a_{13} & , \dots a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22}+x, & c_{23} & , \dots a_{2n} \\ a_{31} & , a_{32} & , a_{33}+x, & \dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & , c_{n2} & , a_{n3}, & \dots c_{nn}+x \end{vmatrix}=0 \qquad (8)$$

будетъ называться вѣковымъ или характерическимъ уравненіемъ. Уравненіе такого вида встрѣчается въ аналитической геометріи при упрощеніи общихъ уравненій кривыхъ линій или поверхностей 2-го порядка, это же уравненіе играетъ важную роль въ нѣкоторыхъ вопросахъ механики и астрономіи. Составимъ произведеніе $f(x) \cdot f(-x)$, оно представится такъ:

$$f(x)\cdot f(-x)\equiv\begin{vmatrix} c_{11}-x^2, & c_{12} & , c_{13}, & \dots c_{1n} \\ c_{21} & , c_{22}-x^2, & c_{23} & \dots c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & , c_{n2} & , c_{n3}, & \dots c_{nn}-x^2 \end{vmatrix}, \qquad (9)$$

опредѣлитель $| c_{ik} |$ будетъ, очевидно, квадратомъ начальнаго опредѣлителя A. Развернемъ теперь опредѣлитель (9). Для ясности возьмемъ опредѣлитель вида:

$$D=\begin{vmatrix} c_{11}+b_{11}, & c_{12}+b_{12}, & \dots c_{1n}+b_{1n} \\ c_{21}+b_{21} & c_{22}+b_{22}, & \dots c_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}+b_{n1}. & c_{n2}+b_{n2}, & \dots c_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix} \qquad (10)$$

составленный изъ элементовъ двухъ опредѣлителей $C=|c_{ik}|$ и $B=|b_{ik}|$; опредѣлитель D можно разложить въ сумму опредѣлителей способомъ, разъясненнымъ въ § 5 главы II-й, мы можемъ написать, что:

$$D=C+\Sigma_1,+\Sigma_2+\dots+\Sigma_{n-1}+B, \qquad (11)$$

гдѣ Σ_1—сумма опредѣлителей, получаемыхъ изъ C замѣной какого-либо его столбца соотвѣтствующимъ столбцомъ опредѣлителя B; Σ_2—сумма опредѣлителей, получаемыхъ изъ C замѣной двухъ его столбцовъ соотвѣтствующими столбцами опредѣлителя B, и т. д.

Чтобы примѣнить сдѣланное замѣчаніе къ нашему опредѣлителю (9), положимъ:

$$b_{ik}=0, \text{ если } i\neq k$$
$$b_{ii}=-x^2,$$

тогда легко сообразить, что развернутый опредѣлитель (9) можно представить такъ:

$$\varphi(-x^2)=f(x)\cdot f(-x)=C-x^2 S_1+x^4 S_2-x^6 S_3+\dots+$$
$$+(-1)^{n-1} x^{2n-2} S_{n-1}+(-1)^n x^{2n} \qquad (9)$$

гдѣ S_1 сумма главныхъ миноровъ перваго порядка *) изъ опредѣлителя C, S_2—сумма главныхъ миноровъ второго порядка изъ того же опредѣлителя C, и т. д. Какъ было доказано въ предшествующемъ параграфѣ каждый главный миноръ опредѣлителя C разлагается въ сумму квадратовъ, слѣдовательно, каждый изъ коэффиціентовъ S_1, S_2, . . . выраженія (9') разлагается въ сумму квадратовъ; а потому, наконецъ, всѣ

$$S_1,\ S_2,\ .\ .\ .\ S_{n-1}$$

положительны при дѣйствительныхъ значеніяхъ величинъ a_{ik}. Такимъ образомъ уравненіе:

$$\varphi(y) \equiv C + S_1 y + S_2 y^2 + \ .\ .\ .\ + S_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0, \qquad (12)$$

не можетъ имѣть положительныхъ корней, а потому уравненіе (8) не можетъ имѣть мнимыхъ корней вида $x = \beta i$. Но, очевидно, уравненіе (8) не можетъ имѣть и вообще комплексныхъ корней вида $x = \alpha + \beta i$; въ самомъ дѣлѣ, если бы таковые существовали, то полагая:

$$a'_{kk} = a_{kk} + \alpha,$$

мы для уравненія:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+z, & a_{12}, & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21}, & a'_{22}+z, & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}, & a_{n2}, & . & . & . & a'_{nn}+z \end{vmatrix} = 0$$

въ противорѣчіи съ вышеприведеннымъ разсужденіемъ получили бы мнимый корень $z = \beta i$.

Итакъ, *вѣковое или характеристическое уравненіе (8) имѣетъ лишь дѣйствительные корни*, мнимыхъ корней оно не имѣетъ вовсе.

3. Косые и полусимметричные опредѣлители. Опредѣлитель называется *косымъ*, если его элементы удовлетворяютъ условію:

$$a_{ik} + a_{ki} = 0 \text{ при } i \neq k, \qquad (13)$$

при этомъ элементы, расположенные по главной діагонали, имѣютъ любыя значенія, но не равны всѣ нулю; если же элементы опредѣлителя удовлетворяютъ условію (13), а кромѣ того всѣ элементы, расположенные по главной діагонали, равны нулю:

$$a_{ik} + a_{ki} = 0,\ a_{kk} = 0, \qquad (14)$$

то опредѣлитель называется *полусимметричскимъ* (или косымъ-симметрическимъ). Послѣдніе опредѣлители особенно замѣчательны по своимъ свойствамъ.

*) Относительно терминовъ миноръ 1-го порядка, 2-го и т. д. не мѣшаетъ здѣсь напомнить примѣчаніе страницы 25-й.

Пусть намъ данъ полусимметрическій опредѣлнтель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0, & a_{12}, & a_{13}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & 0, & a_{23}, & \dots & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & 0, & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \dots & 0 \end{vmatrix}, \qquad (15)$$

умножимъ каждый его столбецъ на -1 и воспользуемся соотношеніемъ $a_{ik}=-a_{ki}$, тогда:

$$(-1)^n\Delta=\begin{vmatrix} 0, & -a_{12}, & -a_{13}, & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21}, & 0, & -a_{23}, & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}, & -a_{n2}, & -a_{n3} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0, & a_{21}, & a_{31}, & \dots & a_{n1} \\ a_{12}, & 0, & a_{32}, & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & a_{3n}, & \dots & 0 \end{vmatrix};$$

но послѣдній опредѣлитель есть транспонированный начальный опредѣлитель (15), итакъ, мы получаемъ для всякаго полусимметрическаго опредѣлителя слѣдующее соотношеніе:

$$(-1)^n\Delta=\Delta;$$

при n нечетномъ равенство возможно лишь въ томъ случаѣ, если $\Delta=0$. Итакъ, *всякій полусимметричный опредѣлитель нечетнаго порядка равенъ нулю.*

Возьмемъ теперь какой-нибудь миноръ опредѣлителя (15):

$$\begin{vmatrix} i_1 i_2 & \dots & i_p \\ k_1 k_2 & \dots & k_p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \dots & a_{i_1kp} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_1} & \dots & a_{i_2kp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ipk_1} & a_{ipk_2} & \dots & a_{ipkp} \end{vmatrix} \qquad (16)$$

и продѣлаемъ надъ нимъ такое же преобразованіе, какъ и выше, т. е. умноживъ всѣ его элементы на -1, замѣнимъ затѣмъ $-a_{ik}$ черезъ a_{ki}, тогда получимъ:

$$(-1)^p\begin{vmatrix} i_1 i_2 & \dots & i_p \\ k_1 k_2 & \dots & k_p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{k_1i_1} & a_{k_2i_1} & \dots & a_{kpi_1} \\ a_{k_1i_2} & a_{k_2i_1}a_{k_2}{}^{i_2} & \dots & a_{kpi_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_1ip} & a_{k_2ip} & \dots & a_{kp}{}^{ip} \end{vmatrix},$$

послѣдній опредѣлитель получается, очевидно, транспонированіемъ прежняго минора (16). Итакъ, между минорами полусимметрическаго опредѣлителя имѣетъ мѣсто зависимость:

$$\begin{vmatrix} i_1 \; i_2 & \dots & i_p \\ k_1 k_2 & \dots & k_p \end{vmatrix}=(-1)^p\begin{vmatrix} k_1 k_2 & \dots & k_p \\ i_1 \; i_2 & \dots & i_p \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Напримѣръ, въ частности:

$$\begin{vmatrix} 1, 2\ldots i-1, i+1,\ldots n \\ 1, 2\ldots k-1, k+1, \ldots n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1, 2\ldots k-1, k+1,\ldots n \\ 1, 2\ldots i-1, i+1,\ldots n \end{vmatrix},$$

или, пользуясь нашимъ обычнымъ обозначеніемъ:

$$M_{ik} = (-1)^{n-1} M_{ki}. \qquad (18)$$

Умножая обѣ части равенства (18) на $(-1)^{i+k}$, найдемъ:

$$A_{ik} = (-1)^{n-1} A_{ki}. \qquad (18')$$

Слѣдовательно, *при n четномъ сопряженныя адъюнкты полусимметрическаго опредѣлителя равны по абсолютной величинѣ, но противоположны по знаку; въ опредѣлителѣ полусимметрическомъ нечетнаго порядка сопряженныя адъюнкты равны.* Отсюда слѣдуетъ, что *опредѣлитель сопряженный съ даннымъ полусимметрическимъ будетъ полусимметрическимъ при четномъ порядкѣ n и симметричнымъ при нечетномъ порядкѣ.*

Такъ какъ полусимметрическій опредѣлитель нечетнаго порядка равенъ нулю, то адъюнкты его элементовъ удовлетворяютъ условіямъ (глава VI, § 4):

$$\frac{A_{1p}}{A_{1q}} = \frac{A_{2p}}{A_{2q}} = \ldots = \frac{A_{pp}}{A_{pq}} = \ldots = \frac{A_{qp}}{A_{qq}} = \ldots = \frac{A_{np}}{A_{nq}}, \qquad (19)$$

но сопряженные его адъюнкты равны $A_{pq} = A_{qp}$, слѣдовательно:

$$A_{pp} A_{qq} = A_{pq}^2. \qquad (20)$$

Покажемъ теперь, что *полусимметрическій опредѣлитель четнаго порядка есть полный квадратъ отъ раціональной функціи его элементовъ.* Предложеніе очевидно для опредѣлителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2.$$

Доказательство справедливости теоремы въ общемъ случаѣ поведемъ способомъ математической индукціи, для этого достаточно доказать лемму: если теорема вѣрна для опредѣлителя $(n-2)$-ого порядка, то она справедлива и для опредѣлителя порядка n.

Пусть (15) будетъ какой-нибудь полусимметрическій опредѣлитель нечетнаго порядка, присоединимъ къ нему строку и столбецъ, тогда (глава IV, замѣч. 3):

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2n} & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdot & \cdot & y_n & 0 \end{vmatrix} = -\Sigma x_i y_k A_{ik}. \qquad (21)$$

Примемъ $y_k = -x_k$, чтобы D былъ полусимметрическимъ, въ такомъ случаѣ:

$$D=\Sigma\ A_{ik}\ x_i\ x_k,$$

гдѣ каждому изъ значковъ i и k при суммированіи даются всѣ значенія изъ ряда номеровъ 1, 2, 3,...n. Пользуясь свойствомъ, что $A_{ik}=A_{ki}$, мы на основаніи предыдущаго опредѣлитель D можемъ подробнѣе представить такъ:

$$D=A_{11}\ x_1^2+A_{22}x_2^2+\ .\ .+A_{nn}\ x_n^{\ 2}+2\ \sum_{ik}'\ A_{ik}\ x_i\ x_k,$$

причемъ въ послѣднемъ членѣ суммированіе распространяется лишь на неравныя между собой значенія i и k изъ ряда номеровъ 1, 2,...n. Въ силу соотношенія (20) D можетъ быть изображено въ слѣдующемъ видѣ:

$$D=(x_1\sqrt{A_{11}}+x_2\sqrt{A_{22}}+\ldots x_n\sqrt{A_{nn}})^2, \tag{22}$$

причемъ знакъ одного изъ радикаловъ, напримѣръ, $\sqrt{A_{11}}$ можетъ быть взятъ любой, знаки же остальныхъ опредѣлятся на основаніи (20) изъ условія:

$$\sqrt{A_{11}}\sqrt{A_{qq}}=A_{1q}. \tag{20'}$$

Всякій діагональный (т. е. главный) миноръ $M_{qq}=A_{qq}$ опредѣлителя (15) (нечетнаго порядка) будетъ полусимметрическимъ опредѣлителемъ четнаго порядка, именно (n—2)-ого. Слѣдовательно, если предположить, что всякій полусимметрическій опредѣлитель четнаго порядка n—2 есть квадратъ раціональной функціи его элементовъ, то соотношеніе (22) показываетъ въ такомъ случаѣ, что полусимметрическій опредѣлитель порядка n также будетъ квадратомъ отъ раціональной функціи его элементовъ. Лемма для индукціи доказана, указанное выше предложеніе справедливо на самомъ дѣлѣ для $n=2$, а потому оно справедливо и въ общемъ случаѣ для всякаго четнаго n.

4. Опредѣлитель ортогональной подстановки. Положимъ, что мы имѣемъ какую-нибудь функцію F ($x_1, x_2, \ldots x_n$) отъ n перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ и вмѣсто послѣднихъ введемъ новыя перемѣнныя $y_1, y_2, \ldots y_n$, связанныя съ прежними линейными соотношеніями:

$$\begin{array}{l} x_1=a_{11}\ y_1+a_{12}\ y_2+\ .\ .\ .\ a_{1n}\ y_n\ , \\ x_2=a_{21}\ y_1+a_{22}\ y_2+\ .\ .\ .\ a_{2n}\ y_n\ , \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ x_n=a_{n1}\ y_1+a_{n2}\ y_2+\ .\ .\ .\ a_{nn}\ y_n\ . \end{array} \tag{23}$$

Въ такомъ случаѣ говорятъ, что мы дѣлаемъ линейное преобразованіе перемѣнныхъ или линейную подстановку. Опредѣлитель $|\ a_{ik}\ |$, составленный изъ коэффиціентовъ соотношеній (23), называютъ опредѣлителемъ линейнаго преобразованія (подстановки). Функція F ($x_1, x_2, \ldots x_n$) послѣ подстановки будетъ функціей отъ новыхъ аргументовъ $y_1, y_2, \ldots y_n$, при этомъ она, вообще говоря, измѣняетъ свой видъ. Линейная подстановка (23) называется *ортогональной*,

если она сумму квадратовъ аргументовъ x_i преобразуетъ въ сумму квадратовъ аргументовъ y_i, т.-е если изъ соотношеній (23) вытекаетъ:

$$F = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2. \qquad (24)$$

Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ коэффиціенты a_{ik} должны удовлетворять условіямъ:

$$a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + \ldots + a_{nk}^2 = 1 \,, \qquad a_{1p}a_{1q} + a_{2p}a_{2q} + \ldots + a_{np}a_{nq} = 0 \,. \quad (p \neq q) \qquad (25)$$

Опредѣлитель $|a_{ik}|$, элементы котораго связаны такими соотношеніями, называется *опредѣлителемъ ортогональной подстановки*. Составимъ квадратъ ортогональнаго опредѣлителя:

$$|a_{ik}|^2 = |c_{ik}| \,,$$

на основаніи (25) и правила перемноженія опредѣлителей имѣемъ

$$c_{kk} = 1 \,, \quad c_{pq} = 0 \,;$$

такимъ образомъ, въ опредѣлителѣ $|c_{ik}|$ всѣ элементы нули кромѣ элементовъ, расположенныхъ по глазной діагонали, каждый изъ послѣднихъ равенъ единицѣ, а потому: *квадратъ ортогональнаго опредѣлителя равенъ единицѣ*, самъ же опредѣлитель:

$$a = |a_{ik}| = \pm 1 \,. \qquad (26)$$

Возьмемъ теперь изъ группы (25) слѣдующія соотношенія:

$$a_{1k}a_{11} + a_{2k}a_{21} + \ldots a_{ik}a_{i1} + \ldots + a_{nk}a_{n1} = 0,$$
$$a_{1k}a_{12} + a_{2k}a_{22} + \ldots a_{ik}a_{i2} + \ldots + a_{nk}a_{n2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1k}a_{1k} + a_{2k}a_{2k} + \ldots a_{ik}a_{ik} + \ldots + a_{nk}a_{nk} = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1k}a_{1n} + a_{2k}a_{2n} + \ldots a_{ik}a_{in} + \ldots + a_{nk}a_{nn} = 0,$$

и умножимъ ихъ соотвѣтственно на адъюнкты $A_{i1}, A_{i2}, \ldots A_{ik}, \ldots A_{in}$, затѣмъ сложимъ, тогда:

$$a_{ik}\,a = A_{ik} \,, \qquad (27)$$

т.-е. ***адъюнкта какого-нибудь элемента ортогональнаго опредѣлителя равна самому элементу, умноженному на опредѣлитель***. Такимъ образомъ:

$$A_{ik} = \pm a_{ik} \,,$$

смотря по значенію опредѣлителя a [ср. (26)].

Система условій (25), опредѣляющихъ ортогональный опредѣлитель, обозначаетъ, что сумма квадратовъ элементовъ любого столбца опредѣлителя равна единицѣ, а сумма произведеній соотвѣтствующихъ элементовъ двухъ какихъ-либо столбцовъ равна нулю. Нетрудно теперь показать, что аналогичное свойство имѣетъ мѣсто и для строкъ ортогональнаго опредѣлителя. Въ самомъ дѣлѣ на основаніи (27) имѣемъ:

$$a_{i1}^2+a_{i2}^2+\ldots+a_{in}^2=a\,(a_{i1}\,A_{i1}+a_{i2}\,A_{i2}+\ldots+a_{in}\,A_{in})=a^2=1, \quad (25')$$

равнымъ образомъ:

$$a_{p1}a_{q1}+a_{p2}a_{q2}+\ldots+a_{pn}a_{qn}=a\,(a_{p1}A_{q1}+a_{p2}A_{q2}+\ldots+a_{pn}A_{qn})=0. \quad (25'')$$

Опредѣлитель a содержитъ n^2 элементовъ, связанныхъ соотношеніями (25), причемъ число послѣднихъ равно.

$$n+\frac{n(n-1)}{2}\;;$$

такимъ образомъ, изъ общаго числа n^2 элементовъ

$$n^2-n-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

элементовъ опредѣлителя могутъ быть выбраны произвольно, остальные найдутся изъ уравненій (25). Вмѣсто разрѣшенія системы (25) относительно этихъ послѣднихъ элементовъ, мы можемъ всѣ элементы a_{ik} выразить черезъ $\frac{n(n-1)}{2}$ какихъ-либо произвольныхъ величинъ. Такая задача была разрѣшена Cayley слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ *косой* опредѣлитель съ равными между собой элементами по главной діагонали:

$$B=\begin{vmatrix} b & b_{12} & b_{13} & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & b & b_{23} & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & . & . & b \end{vmatrix} \quad (28)$$

такъ что:

$$b_{ik}=-b_{ki}\;,\quad b_{ii}=b\;. \quad (29)$$

Положимъ далѣе:

$$\begin{aligned} x_i&=b_{1i}z_1+b_{2i}z_2+\;.\;\;.+b_{ni}z_n\;, \\ y_i&=b_{i1}z_1+b_{i2}z_2+\;.\;\;.+b_{in}z_n\;, \end{aligned} \quad (30)$$

гдѣ $(x_1x_2..x_n)$, $(y_1y_2..y_n)$, $(z_1z_2..z_n)$ три какихъ-либо группы перемѣнныхъ. Складывая соотношенія (30), найдемъ:

$$x_i+y_i=2bz_i \quad (31)$$

Умножимъ теперь первое изъ соотношеній (30) на B_{pi} и второе на B_{iq}:

$$\begin{aligned} B_{pi}x_i&=b_{1i}B_{pi}z_1+b_{2i}B_{pi}z_2+\ldots+b_{pi}B_{pi}z_p+\ldots+b_{ni}B_{pi}z_n\;, \\ B_{iq}y_i&=b_{i1}B_{iq}z_1+b_{2i}B_{iq}z_2+\ldots+b_{iq}B_{iq}z_q+\ldots+b_{in}B_{iq}z_n\;, \end{aligned} \quad (30')$$

теперь просуммируемъ эти соотношенія по номеру i:

$$\begin{aligned} B_{p1}x_1+B_{p2}x_2+\;.\;\;.\;\;.+B_{pn}x_n&=Bz_p\;, \\ B_{1q}y_1+B_{2q}y_2+\;.\;\;.\;\;.+B_{nq}y_n&=Bz_q\;; \end{aligned} \quad (32)$$

наконецъ, въ правой части послѣднихъ равенствъ вмѣсто z подставимъ соотвѣтствующія выраженія по формулѣ (31), тогда окончательно получимъ:

$$y_p = \frac{2bB_{p1}}{B}x_1 + \frac{2bB_{p2}}{B}x_2 + \dots + \left(\frac{2bB_{pp}}{B} - 1\right)x_p + \dots + \frac{2bB_{pn}}{B}x_n\,,$$
$$x_q = \frac{2bB_{1q}}{B}y_1 + \frac{2bB_{kq}}{B}y_2 + \dots + \left(\frac{2bB_{qq}}{B} - 1\right)y_q + \dots + \frac{2bB_{nq}}{B}y_n\,, \tag{33}$$

Наконецъ, полагая:

$$a_{ik} = \frac{2bB_{ik}}{B},\quad a_{ii} = \frac{2bB_{ii}}{B} - 1 \tag{34}$$

мы получимъ преобразованія перемѣнныхъ (x) въ перемѣнныя (y) или обратно:

$$x_q = a_{1q}y_1 + a_{2q}y_2 + \dots + a_{nq}y_n\,,$$
$$y_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}y_2 + \dots + a_{pn}x_n\,. \tag{35}$$

Легко видѣть, что полученное преобразованіе будетъ ортогональнымъ: оно сумму квадратовъ перемѣнныхъ (x) преобразуетъ въ сумму квадратовъ перемѣнныхъ (y). Въ самомъ дѣлѣ на основаніи соотношенія (30):

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i (b_{1i}z_1 + b_{2i}z_2 + \dots + b_{ni}z_n)^2,$$
$$\sum_i y_i^2 = \sum_i (b_{i1}z_1 + b_{i2}z_2 + \dots + b_{in}z_n)^2.$$

Если развернуть правыя части этихъ равенствъ, то онѣ окажутся явно тождественными; коэффиціенты при какомъ-нибудь z_p^2 въ томъ и другомъ случаѣ будутъ равны между собой:

$$\sum_i b_{pi}^2 = \sum_i b_{ip}^2$$

въ силу условій (29), точно такъ же и коэффиціенты при $2z_pz_q$:

$$\sum_i b_{pi}\,b_{qi} = \sum_i b_{ip}\,b_{iq}\,.$$

Въ опредѣлителѣ B всего произвольныхъ величинъ будетъ:

$$\frac{n\,(n-1)}{2} + 1\,,$$

но выраженія (34) однородны относительно всѣхъ элементовъ этого опредѣлителя, такъ что по существу элементы a_{ik} содержатъ какъ разъ

$$\frac{n\,(n-1)}{2}$$

произвольныхъ величинъ.

Составимъ теперь опредѣлитель a по формуламъ (34):

$$a = \frac{1}{B^n}\begin{vmatrix} 2bB_{11}-B, & 2bB_{12}, & \dots & 2bB_{1n} \\ 2bB_{21}, & 2bB_{22}-B, & \dots & 2bB_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2bB_{n1}, & 2bB_{n2}, & \dots & 2bB_{nn}-B \end{vmatrix}$$

и умножимъ его на опредѣлитель (28) (столбцы на столбцы, напримѣръ):

$$aB = \frac{1}{B^n}\begin{vmatrix} bB, & -b_{21}B, & \dots & -b_{n1}B \\ -b_{12}B, & bB, & \dots & -b_{n2}B \\ -b_{13}B, & -b_{23}B, & \dots & -b_{n3}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{1n}B, & -b_{2n}B, & \dots & bB \end{vmatrix},$$

замѣнивъ въ правой части $-b_{ik}$ на b_{ki} и сокративъ всѣ строки на B, получимъ:

$$aB = \begin{vmatrix} b & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b \end{vmatrix}$$

или наконецъ:

$$a = +1 .$$

При $n = 2$ за опредѣлитель B можемъ взять

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

тогда соотвѣтствующій ортогональный опредѣлитель, изъ котораго возьмутся коэффиціенты ортогональнаго преобразованія, будетъ:

$$a = \begin{vmatrix} \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, & \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ \frac{-2\lambda}{1+\lambda^2}, & \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{vmatrix}.$$

Для $n = 3$ можемъ положить:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \nu & \mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ -\mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

тогда ортогональный опредѣлитель будетъ:

$$a = \begin{vmatrix} \frac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, & \frac{2(\nu-\lambda\mu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, & \frac{2(\mu+\lambda\nu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ \frac{-2(\nu+\lambda\mu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, & \frac{1+\mu^2-\lambda^2-\nu^2}{2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, & \frac{2(\lambda-\mu\nu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ \frac{-2(\mu-\lambda\nu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, & \frac{-2(\lambda+\mu\nu)}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}, & \frac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \end{vmatrix}$$

Глава X.

Исключеніе неизвѣстнаго изъ двухъ уравненій высшихъ степеней.

1. Способъ Сильвестра-Гессе. Результатъ. Возьмемъ два уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots a_n = 0 \\ \varphi(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots b_m = 0 \end{aligned} \qquad (1),$$

Предположимъ, что они имѣютъ общее рѣшеніе, т.-е. два равенства (1) удовлетворяютск при одномъ и томъ же значеніи неизвѣстнаго x. Очевидно, это возможно только при выполненіи извѣстнаго условія, связывающаго коэффиціенты a_i и b_i; наша ближайшая задача—найти это условіе.

Составимъ рядъ уравненій:

$$\begin{aligned} &x^{m-1}f = 0,\ x^{m-2}f = 0, \ldots xf = 0,\ f = 0, \\ &x^{n-1}\varphi = 0,\ x^{n-2}\varphi = 0, \ldots x\varphi = 0,\ \varphi = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

они будутъ удовлетворяться тѣмъ же самымъ значеніемъ неизвѣстнаго x, какъ и два уравненія (1). Система уравненій (2) будетъ линейной (неоднородной) относительно $m+n-1$ степеней x, $x^2, \ldots x^{m+n-1}$; такъ какъ число уравненій $(m+n)$ на единицу болѣе числа степеней, то для ихъ совмѣстности необходимо, чтобы опредѣлитель системы обращался въ нуль (глава VII, § 12). Итакъ, мы получаемъ условіе совмѣстности системы (2) или, что то же самое, системы (1), въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & a_2 \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{m-1} & b_m & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_0 & b_1 & \ldots & b_m \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Полученный опредѣлитель, равенство нулю котораго является необходимымъ условіемъ существованія общаго рѣшенія уравненій (1), называется результантомъ этихъ уравненій; будемъ его въ дальнѣйшемъ обозначать черезъ R. Изъ самаго способа полученія результанта ясно, что этотъ опредѣлитель порядка $m+n$, m первыхъ его строкъ содержатъ коэффиціенты перваго уравненія, n послѣднихъ строкъ содержатъ коэффиціенты второго уравненія.

Примѣръ. Условіемъ существованія общаго корня двухъ уравненій

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$
$$b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$$

будетъ равенство нулю ихъ результанта:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Лѣвую часть можемъ развернуть по теоремѣ Laplace'a:

$$a_0^2b_2^3 - a_0a_1\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} + a_0a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & 0 \\ b_0 & b_0 & b_2 \end{vmatrix} - a_0a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (a_1^2 - a_0a_2)\begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} - (a_1a_2 - a_0a_3)\begin{vmatrix} b_0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_2 \end{vmatrix} + a_1a_3\begin{vmatrix} b_0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (a_2^2 - a_1a_3\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{vmatrix} - a_2a_3\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_2 \\ 0 & 0 & b_1 \end{vmatrix} + a_3^2\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_0 \end{vmatrix} = a_0^2b_2^3 -$$

$$- a_0a_1b_1b_2^2 + a_0a_2(b_1^2 - b_0b_2)b_2 - a_0a_3(b_1^3 - b_0b_1b_2) + (a_1^2 - a_0a_2)b_0b_2^3 -$$
$$- (a_1a_2 - a_0a_3)b_0b_1b_2 + a_1a_3b_0(b_1^2 - b_0b_2) + (a_2^2 - a_1a_3)b_0^2b_2 -$$
$$- a_2a_3b_0^2b_1 + a_3^2b_0^3$$

или окончательно:

$$a_0^2b_2^3 - a_0a_1b_1b_2^2 + a_0a_2b_1^2b_2 - 2a_0a_2b_0b_2^2 - a_0a_3b_1^3 + 2a_0a_3b_0b_1b_2 +$$
$$a_1^2b_0b_2^2 - a_1a_2b_0b_1b_2 + a_1a_3b_0b_1^2 - 2a_1a_3b_0^2b_2 + a_2^2b_0^2b_2 - a_2a_3b_0^2b_1 +$$
$$+ a_3^2b_0^3 = 0.$$

2. **Способъ Эйлера.** Положимъ, что уравненія (1) удовлетворяются однимъ и тѣмъ же значеніемъ неизвѣстнаго, именно $x = \alpha$. Такъ какъ $f(\alpha) = 0$, то многочленъ $f(x)$ будетъ дѣлиться безъ остатка на разность $x - \alpha$ *), при этомъ частное $\frac{f(x)}{x - \alpha}$ будетъ многочленомъ степени $n - 1$; обозначимъ это частное черезъ $P_{n-1}(x)$, такъ что

$$f(x) \equiv (x - \alpha) \, . \, P_{n-1}(x). \qquad (4)$$

Аналогично примемъ

$$\varphi(x) \equiv (x - \alpha) \, . \, Q_{m-1}(x), \qquad (5)$$

ибо α по условію удовлетворяетъ и второму уравненію $\varphi(x) = 0$. Умножимъ тождество (4) на Q_{m-1}, тождество (5) на P_{n-1} и вычтемъ почленно одно изъ другого, результатъ

$$f(x) \, . \, (x)Q_{m-1}(x) - \varphi(x) \, . \, P_{n-1} \equiv 0 \qquad (60)$$

---

*) Предложеніе будетъ доказано въ курсѣ алгебры.

будетъ также тождествомъ относительно неизвѣстнаго x. Итакъ мы доказали, что если два уравненія (1) будутъ имѣть общее рѣшеніе, то можно подобрать два такихъ многочлена Q_{m-1} и P_{n-1}, первый степени $m-1$, второй степени $n-1$ относительно x, которые будутъ тождественно удовлетворять соотношенію (6). На этотъ принципъ и опирается способъ Эйлера исключенія неизвѣстнаго изъ двухъ данныхъ уравненій.

Положимъ, что

$$Q_{m-1}(x)=\alpha_0 x^{m-1}+\alpha_1 x^{m-2}+\ldots+\alpha_{m-1}$$
$$-P_{n-1}(x)=\beta_0 x^{n-1}+\beta_1 x^{n-2}+\ldots+\beta_{n-1}. \qquad (7)$$

Подставимъ теперь эти многочлены въ равенство (6); такъ какъ послѣднее должно быть тождествомъ относительно x, то коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x должны пропадать. При неопредѣленныхъ коэффиціентахъ α_i и β_i лѣвая часть равенства (6) будетъ степени $n+m-1$ относительно x, слѣдовательно, приравнивая нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x, мы получимъ $n+m$ уравненій, линейныхъ, однородныхъ относительно α_i и β_i. Эти послѣднія уравненія будутъ совмѣстны, если опредѣлитель, составленный изъ ихъ коэффиціентовъ обратится въ нуль. Разберемъ подробнѣе полученный результатъ. Произведемъ на самомъ дѣлѣ подстановку многочленовъ (7) въ равенство (6):

$$(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)(\alpha_0x^{m-1}+\alpha_1x^{m-2}+\ldots+\alpha_{m-1})+$$
$$+(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m)(\beta_0x^{n-1}+\beta_1x^{n-2}+\ldots+\beta_{n-1})\equiv 0 \quad (7').$$

Развернувъ лѣвую часть этого равенства, приравниваемъ нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x-а:

$$\begin{aligned}
&a_0\alpha_0+b_0\beta_0=0\\
&a_1\alpha_0+a_0\alpha_1+b_1\beta_0+b_0\beta_1=0\\
&a_2\alpha_0+a_1\alpha_1+a_0\alpha_2+b_2\beta_0+b_1\beta_1+b_0\beta_2=0 \qquad (8)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_n\alpha_{m-2}+a_{n-1}\alpha_{m-1}+b_m\beta_{n-2}+b_{m-1}\beta_{m-1}=0\\
&a_n\alpha_{m-1}+b_m\beta_{n-1}=0.
\end{aligned}$$

Условіемъ совмѣстности этой системы будетъ:

$$\begin{vmatrix}
a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 & b_1 & b_0 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & & & & & & & & & \ldots\\
0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{m-1}\\
0 & 0 & 0 & \ldots & a_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_m
\end{vmatrix}=0. \qquad (9)$$

Нетрудно видѣть, что это есть транспонированный (глава II, § 1) опредѣлитель (3), полученный по способу Сильвестра-Гессе.

2. Достаточное условіе существованія общаго корня двухъ уравненій. Равенство нулю результанта двухъ уравненій является необходимымъ условіемъ существованія общаго

корня для этихъ уравненій. Посмотримъ, будетъ ли это условіе и достаточнымъ. Въ опредѣлителѣ (3) прибавимъ къ элементамъ послѣдняго столбца элементы остальныхъ, умноживъ элементы перваго столбца на x^{m+n-1}, второго на x^{m+n-2}, и т. д., тогда найдемъ:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & x^{m-1}f \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & x^{m-2}f \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & \dots & f \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & x^{n-1}\varphi \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & \dots & x^{n-2}\varphi \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & \dots & \varphi \end{vmatrix} \qquad (10).$$

Этотъ новый опредѣлитель и опредѣлитель R имѣютъ всѣ столбцы, кромѣ послѣдняго, одинаковые, а потому адъюнкты или миноры элементовъ послѣдняго столбца въ томъ и другомъ опредѣлителѣ тоже одинаковы; будемъ миноры, соотвѣтствующіе элементамъ послѣдняго столбца, обозначать черезъ $R_{i,\,m+n}$.

Разложимъ теперь опредѣлитель правой части соотношенія (10) по элементамъ послѣдняго столбца.

$$\begin{aligned} R = f[(-1)^{m+n+1} \cdot R_{1,\,m+n}x^{m-1} + (-1)^{m+n+2} \cdot R_{2,\,m+n}x^{m-2} + \\ + \dots + (-1)^{m+n+m} R_{m,\,m+n}] + \varphi[(-1)^{m+n+m+1} R_{m+1,\,m+n}\, x^{n-1} + \\ + (-1)^{m+n+m+2} R_{m+2,\,m+n}x^{n-2} + \dots + (-1)^{m+n+m+n} R_{m+n,\,m+n}] \end{aligned} \qquad (11)$$

Назовемъ R_1 тотъ опредѣлитель, который получается изъ R вычеркиваніемъ двухъ строкъ номеровъ $m+1$ и $m+n$ и двухъ послѣднихъ столбцовъ; R_1 будетъ одинъ изъ миноровъ 2-го порядка опредѣлителя R. Обозначимъ далѣе многочлены, стоящіе въ скобкахъ въ правой части равенства (11) черезъ $p_{m-1}(x)$ и $q_{n-1}(x)$, тогда это равенство короче представится слѣдующимъ образомъ.

$$R = f(x)p_{m-1}(x) - \varphi(x)q_{n-1}(x). \qquad (11')$$

Коэффиціенты при старшихъ степеняхъ многочленовъ p и q выражаются черезъ опредѣлитель R_1; въ самомъ дѣлѣ:

$$R_{1,\,m+n} = \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_{m-1} \end{vmatrix} = (-1)^{m+1} \cdot b_0 R_1$$

аналогично:

$$R_{m+1,\,m+n}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & a_n & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & . & . & . & . & a_n & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & a_0 & a_1 & & . & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & . & . & . & b_m & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & b_0 & b_1 & b_2 & & . & b_{m-1} \end{vmatrix}=a_0R_1$$

Такимъ образомъ, если $R_1 \neq 0$, то многочлены p и q не обращаются тождественно въ нули, первый изъ нихъ будетъ непремѣнно степени $m-1$, второй степени $n-1$. Предположимъ, наконецъ, что результантъ R обращается въ нуль, въ такомъ случаѣ тождественное соотношенie (11') покажетъ, что произведенie двухъ многочленовъ $\varphi(x)q_{n-1}(x)$ должно дѣлиться безъ остатка на многочленъ $f(x)$; такъ какъ $q(x)$ степени $n-1$, то отсюда слѣдуетъ, что $\varphi(x)$ и $f(x)$ должны имѣть общаго дѣлителя по крайней мѣрѣ первой степени. А это какъ разъ и обозначаетъ, что $\varphi(x)$ и $f(x)$ будутъ имѣть общiй корень. Итакъ равенство нулю результанта двухъ уравненiй (при $R_1 \neq 0$) является необходимымъ и достаточнымъ условiемъ существованiя общаго корня.

4. **Существованiе нѣсколькихъ общихъ рѣшенiй двухъ уравненiй.** Методъ Эйлера, которымъ мы получили необходимое условiе существованiя одного общаго корня двухъ уравненiй, можно примѣнить и къ отысканiю необходимыхъ условiй существованiя нѣсколькихъ общихъ рѣшенiй данныхъ двухъ уравненiй. Вопросъ этотъ мы подробнѣе разсмотримъ въ связи съ другимъ методомъ (см. ниже способъ Bèzout), здѣсь же дадимъ только результатъ. Обозначимъ черезъ R_k опредѣлитель, который получается изъ опредѣлителя R пропускомъ строкъ: 1) k послѣднихъ, содержащихъ коэффицiенты a_i, 2) k послѣднихъ, содержащихъ коэффицiенты b_i и пропускомъ $2k$ послѣднихъ столбцовъ:

$$R_k=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & a_n & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & . & . & . & . & a_n & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . & b_m & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & . & . & . & . & b_m & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m-k \text{ строкъ} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n-k \text{ строкъ.} \end{matrix} \qquad (13)$$

Для симметрiи самый результантъ R будемъ обозначать черезъ R_0.

Принявъ эти обозначенiя, можно утверждать: условiя:

$$R_0=0,\ R_1=0,\ .\ .\ .\ .\ R_{k-1}=0,\ \text{но } R_k \neq 0 \qquad (13)$$

являются необходимыми и достаточными, чтобы уравненiя $f(x)=0$ и $\varphi(x)=0$ имѣли k и только k общихъ (или равныхъ) корней.

5. Результантъ Эйлера. Пусть первое изъ нашихъ уравненій (1) имѣетъ корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, корнями второго пусть будутъ $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$.

Составимъ слѣдующія выраженія:

$$\begin{aligned} F_m &= f(\beta_1)f(\beta_2) \ldots f(\beta_m) \\ \text{и} \quad \Phi_n &= \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_n) \end{aligned} \qquad (14).$$

Если данныя уравненія имѣютъ общій корень, то одно изъ значеній β_i будетъ обращать въ нуль $f(x)$, такъ что произведеніе F_m обратится въ нуль; то же самое будетъ и съ произведеніемъ Φ_n. Въ высшей алгебрѣ доказывается, что F_m, какъ симметрическая функція корней второго уравненія, можетъ быть выражена черезъ коэффиціенты послѣдняго. Итакъ F_m есть функція коэффиціентовъ данныхъ двухъ уравненій, обращеніе ея въ нуль указываетъ на существованіе общаго рѣшенія данныхъ уравненій. Отсюда слѣдуетъ, что F_m, а равно и Φ_n должны быть связаны съ результантомъ R, ибо онѣ одновременно обращаются въ нуль. Вопросъ о существованіи общихъ рѣшеній двухъ уравненій Эйлеръ изслѣдовалъ различными путями, въ одномъ изъ первыхъ его способовъ полученное имъ условіе отличается отъ условія $F_m = 0$ только нѣкоторымъ множителемъ въ лѣвой части, вотъ почему выраженіе F_m мы назовемъ результантомъ Эйлера. Найдемъ теперь зависимость между результантомъ Эйлера F_m и результантомъ Сильвестра R. Положимъ, что $f(x) = u$; если x давать рядъ значеній $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m$, u будетъ принимать значенія $u_1 = f(\beta_1), u_2 = f(\beta_2), \ldots u_m = f(\beta_m)$. Такимъ образомъ u можетъ быть корнемъ нѣкотораго уравненія степени m, именно уравненія:

$$(u - u_1)(u - u_2) \ldots (u - u_m) = 0 \qquad (15$$

Свободный членъ въ этомъ уравненіи будетъ:

$$(-1)^m u_1 \, u_2 \ldots u_m \qquad (16)$$

Чтобы получить это уравненіе, надо изъ двухъ соотношеній

$$\varphi(x) = 0 \text{ и } f(x) - u = 0$$

исключить неизвѣстное x. Для исключенія воспользуемся методомъ Сильвестра; возьмемъ систему:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = 0, \; x\varphi(x) = 0, \ldots \; x^{n-1}\varphi(x) = 0 \\ &f(x) - u = 0, \; x[f(x) - u] = 0 \ldots x^{m-1}[f(x) - u] = 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

и исключимъ изъ нея, какъ системы неоднородныхъ линейныхъ уравненій, различныя степени неизвѣстнаго x, именно степени x, $x^2, \ldots x^{m+n-1}$. Результатъ исключенія представится въ формѣ равенства нулю опредѣлителя системы (17):

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \dots & a_{n-1}, & a_n-u, & 0, & 0 & \dots & 0 \\ a, & a_0, & \dots & \dots & a_{n-1}, & a_n-u, & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & a_0, & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_n-u \\ b_0, & b_1, & \dots & b_m, & 0, & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0, & b_0, & \dots & \dots & b_m, & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & b_0, & b_1 & \dots & \dots & \dots & b_m \end{vmatrix} = 0 \qquad (18).$$

Это и есть искомое уравненіе, которому удовлетворяетъ u. Свободный членъ въ этомъ уравненіи получится, если мы приемъ $u=0$, но тогда лѣвая часть уравненія обращается въ реаультантъ R. Что касается наивысшей степени u, то она получится изъ группы:

$$(-1)^\lambda \cdot (a_n-u)^m b_0^n,$$

гдѣ λ, согласно теоремѣ Lapla e'a, равно суммѣ указателей первыхъ m строкъ и послѣднихъ m столбцовъ (правый верхній квадратъ въ опредѣлителѣ):

$$\lambda=1+2+\dots+m+[n+1+n+2+\dots+n+m]=m\cdot n+2\mu,$$

Итакъ въ уравненіи (18) старшій и свободный члены представятся въ слѣдующемъ видѣ:

$$(-1)^{mn+m} b_0^n u^m + \dots\dots\dots + R = 0. \qquad (18')$$

Такимъ образомъ произведеніе (16) опредѣлится такъ:

$$\frac{R}{(-1)^{mn}.b_0^n} = u_1\ u_2 \dots u_m, \text{ или}$$

для результанта находимъ новое выраженіе:

$$R=(-1)^{mn} b_0^n f(\beta_1) f(\beta_2) \dots f(\beta_m). \qquad (19)$$

Такъ какъ далѣе, какъ извѣстно

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n),$$

то соотношеніе (19) принимаетъ видъ:

$$\begin{aligned} R=(-1)^{mn}.a_0^m b_0^n(\beta_1-\alpha_1)(\beta_1-\alpha_2)&\dots\dots(\beta_1-\alpha_n). \\ .(\beta_2-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)&\dots\dots(\beta_2-\alpha_n). \\ \dots\dots\dots&\dots\dots\dots \\ .(\beta_m-\alpha_1)(\beta_m-\alpha_2)&\dots\dots(\beta_2-\alpha_n) \end{aligned} \qquad (20)$$

или, соединяя множители въ произведеніи столбцами, найдемъ

$$R=a_0^m\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\dots\dots\varphi(\alpha_n). \qquad (21)$$

Эти выраженія (9) и (21) для результанта позволяютъ намъ лишній разъ подтвердить то обстоятельство, что обращеніе въ нуль результанта есть необходимый и достаточный признакъ существованія общаго корня двухъ данныхъ уравненій.

6. **Измѣреніе результанта относительно коэффиціентовъ данныхъ уравненій.** Такъ какъ результантъ R въ формѣ опредѣлителя (3) содержитъ m строкъ съ коэффиціентами перваго уравненія и элементы этихъ строкъ линейны относительно коэффиціентовъ, то R будетъ однородной функціей измѣренія m относительно коэффиціентовъ перваго уравненія. Подобнымъ образомъ, очевидно, можно заключить, что результантъ будетъ однородной функціей измѣренія n относительно коэффиціентовъ второго уравненія.

Слѣдовательно, относительно коэффиціентовъ того и другого уравненія результантъ будетъ однородной функціей измѣренія равнаго $m+n$. Къ тому же заключенію приводитъ насъ и разсмотрѣніе формъ результанта (19) и (21). Произведеніе въ правой части формулы (19) содержитъ m множителей $f(\beta_i)$, изъ которыхъ каждый является линейной, однородной функціей коэффиціентовъ перваго уравненія, а потому это произведеніе будетъ однородной функціей измѣренія m относительно этихъ коэффиціентовъ. Формула (21) подобнымъ же образомъ позволяетъ намъ сказать, что результантъ есть однородная функція измѣренія n относительно коэффиціентовъ второго уравненія.

7. **Вѣсъ результанта.** Вѣсомъ одночлена $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_k^{\alpha_k}$ называется сумма произведеній показателей входящихъ въ него буквъ на ихъ индексы: $\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+k\alpha_k$. Многочленъ называется изобарнымъ, если всѣ его члены одинаковаго вѣса. Покажемъ, что результантъ есть изобарная функція коэффиціентовъ данныхъ уравненій, и опредѣлимъ его вѣсъ.

Возьмемъ опредѣлитель $\Delta=[a_{ik}]$ порядка $m+n$, умножимъ столбцы его соотвѣтственно на $\lambda^0, \lambda', \lambda^2 \ldots \lambda^{m+n-1}$, а затѣмъ m первыхъ строкъ раздѣлимъ на $\lambda^0, \lambda^1, \ldots \lambda^{m-1}$, а послѣдующія строки на $\lambda^0, \lambda^1, \ldots \lambda^{n-1}$, тогда весь опредѣлитель умножится на λ въ такой степени:

$$1+2+\ldots+(m+n-1)-[1+2+\ldots+m-1]-[1+2+\ldots+n-1]=$$
$$=\frac{(m+n-1)(m+n)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=m.\ n,$$

т.-е. опредѣлитель умножается на λ^{mn}. Отъ умноженнія столбцовъ каждый элементъ a_{ik} получаетъ множителя λ^{k-1}; если далѣе $i\leqslant m$, то этотъ элементъ затѣмъ дѣлится на λ^{i-1}, слѣдовательно при $i\leqslant m$ элементъ a_{ik} получаетъ множителя λ^{k-i}; если же $i>m$, то указаннымъ дѣленіемъ строкъ мы каждый элементъ дѣлимъ на λ^{i-m-1}, слѣдовательно при $i>m$ элементъ a_{ik} окончательно получитъ множителя λ^{m+k-i}. Итакъ символически мы можемъ записать

$$\Delta.\lambda^{mn}=\left|\begin{matrix}\lambda^{k-i}\ a_{ik}\\ \lambda^{m+k-j}\ a_{jk}\end{matrix}\right|\begin{matrix}i=1,\ 2,\ldots m\\ j=m+1,\ m+2,\ldots m+n\end{matrix}\Bigg\}k=1,\ 2,\ldots m+n \qquad (22)$$

Примемъ теперь:

$$a_{ik}=a_{k-i} \quad \text{при } i\leqslant m$$
$$a_{ik}=b_{m+k-i} \text{ при } i>m \qquad (23)$$

причемъ a и b съ отрицательными значками или большими, чѣмъ таковые имѣются въ уравненiяхъ (1), будемъ считать равными нулю, тогда нашъ опредѣлитель обратится въ результантъ R (3), а соотношенiе (22) приметъ видъ:

$$\lambda^{mn} = \begin{vmatrix} \lambda^{k-i} a_{k-i} \\ \lambda^{m+k-j} b_{m+k-j} \end{vmatrix} \begin{matrix} i=1,\ 2, \ldots m \\ j=m+1,\ m+2, \ldots m+n \end{matrix} \Bigg\} k=1,2,\ldots m+n \quad (22')$$

такимъ образомъ каждое a_h и $b_{h'}$ получаетъ множителемъ λ какъ разъ въ степени равной индексамъ этихъ буквъ. Если развернуть опредѣлитель правой части формулы (22'), то каждый членъ его будетъ содержать λ въ степени равной вѣсу этого члена. Слѣдовательно, формула (22') показываетъ, что всѣ члены развернутаго результанта имѣютъ одинаковый вѣсъ и притомъ равный произведенiю mn, т.-е. степеней данныхъ двухъ уравненiй. Результантъ есть изобарная функцiя коэффицiентовъ данныхъ уравненiй, и вѣсъ ея равенъ mn.

Дадимъ полученному предложенiю второе доказательство. Развернутый опредѣлитедь $\Delta = | \alpha_{i\kappa} |$ представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Delta = \Sigma \pm \alpha_{1\kappa_1} \alpha_{2\kappa_2} \ldots \alpha_{m+n\kappa_{m+n}}$$

Суммированiе распространяется на всѣ $(m+n)!$ перестановокъ индексовъ 1, 2,... $m+n$. Произведемъ теперь замѣну по формуламъ (23),—тогда

$$R = \Sigma \pm a_{k_1-1} a_{k_2-2} \ldots a_{k_m-m} b_{k_{m+1}-1} b_{k_{m+2}-2} \ldots b_{k_{m+n}-n} \quad (24)$$

Вѣсъ какого-нибудь члена результанта будетъ равняться суммѣ указателей входящихъ въ него буквъ:

$$(k_1-1)+(k_2-2)+\ldots+(k_m-m)+(k_{m+1}-1)+$$
$$+(k_{m+2}-2)+\ldots+(k_{m+n}-n)$$

или

$$\frac{(m+n+1)(m+n)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = m.n$$

Здѣсь мы приняли, что $k_1+k_2+\ldots+k_{m+n}=1+2+3+4+\ldots+(m+n)$, такъ какъ $k_1, k_2 \ldots k_{m+n}$ это тѣ же значки $1, 2, \ldots m+n$, но только расположенные въ произвольномъ порядкѣ. Напомнимъ, что согласно условiю a_h и b_h равны нулю, если индексъ h окажется отрицательнымъ или большимъ n для a_h и большимъ m для b_h, для такихъ индексовъ пропадаетъ все произведенiе, входящее въ составъ суммы (24).

Отмѣтимъ, не входя въ подробности, что третье доказательство изобарности результанта мы могли бы получить легко изъ разсмотрѣнiя соотношенiя (20).

Въ § 1 этой главы мы развернули результантъ уравненiя 3-ей и уравненiя 2-ой степени. Нетрудно провѣрить, что этотъ результантъ дѣйствительно изобарная функцiя вѣса равнаго 6.

Способъ исключенiя Bézout для уравненiй одинаковыхъ степеней. Два разобранныхъ способа исключенiя

неизвѣстнаго изъ двухъ уравненій, именно Сильвестра и Эйлера, имѣютъ то неудобство, что результатъ представляется въ видѣ опредѣлителя высокаго порядка, равнаго суммѣ степеней данныхъ уравненій. Мы дадимъ еще третій способъ исключенія, способъ Bézout, который приводитъ къ опредѣлителю меньшаго порядка. Разберемъ сначала простѣйшій случай, когда оба данныхъ уравненія будутъ одинаковой степени:

$$f \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$
$$\varphi \equiv b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_n = 0 \qquad (25)$$

Составимъ рядъ слѣдующихъ функцій.

$$\begin{array}{llll} f_0 & = a_0 & \varphi_0 & = b_0 \\ f_1 & = a_0x + a_1 & \varphi_1 & = b_0x + b_1 \\ f_2 & = a_0x_2 + a_1x + a_2 & \varphi_2 & = b_0x_2 + b_1x + b_2 \\ \ldots & & \ldots & \\ f_k & = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k & \varphi_k & = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_k \\ \ldots & & \ldots & \\ f_{n-1} & = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} & \varphi_{n-1} & = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} \end{array} \qquad (26)$$

Если теперь два уравненія (25) удовлетворяются общимъ значеніемъ x-а, то же значеніе x-а будетъ, очевидно, удовлетворять и ряду слѣдующихъ соотношеній:

$$\begin{array}{c} \varphi_0 f - f_0\varphi = 0 \\ \varphi_1 f - f_1\varphi = 0 \\ \ldots \\ \varphi_i f - f_i\varphi = 0 \\ \varphi_{n-1} f - f_{n-1}\varphi = 0 \\ \ldots \end{array} \qquad (27)$$

Развернемъ одно изъ этихъ уравненій подробнѣе:

$$\varphi_i f - f_i\varphi \equiv (b_0x^i + b_1x^{i-1} + \ldots + b_i)(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_n) -$$
$$-(a_0x^i + a_1x^{i-1} + \ldots + a_i)(b_0x^n + {}_1x^{n-1} + \ldots + b_n) = 0 \qquad (27')$$

Коэффиціентъ при степени x^{n+h} въ лѣвой части этого уравненія будетъ:

$$(a_0b_{i-h} + a_1b_{i-h-1} + \ldots + a_{i-h}b_0) - (b_0a_{i-h} + b_1a_{i-h-1} + \ldots b_{i-h}a_0),$$

этотъ коэффиціентъ пропадаетъ при всякомъ значеніи h отъ 0 до i, слѣдовательно, въ лѣвой части уравненія (27′) пропадаютъ всѣ степени x выше $n-1$. Коэффиціентъ при x^{n-h} обозначимъ $A_{i+1,h}$ онъ будетъ имѣть слѣдующее выраженіе:

$$A_{i+1,h} = (a_hb_i + a_{h+1}b_{i-1} + a_{h+2}b_{i-2} + \ldots) -$$
$$-(b_ha_i + b_{h+1}a_{i-1} + b_{h+2}a_{i-2} + \ldots)$$

или

$$A_{i+1,h} = (h, i) + (h+1, i-1) + (h+2, i-2) + \ldots \qquad (28)$$

гдѣ для краткости принято $(h, i) = a_hb_i - a_ib_h$. Въ формулѣ (28) скобки (h, i) берутся до тѣхъ поръ, пока существуютъ коэффиці-

енты a и b съ такими значками; a_i, b_i со значками отрицательными или большими, чѣмъ таковые имѣются въ уравненіяхъ (25), слѣдуетъ принимать равными нулю.

Итакъ система (27) будетъ линейной, неоднородной системой n уравненій съ $n-1$ неизвѣстными степенями x, x^2, x^3, . . . x^{n-1}. Условіемъ совмѣстности системы по отношенію къ этимъ степенямъ будетъ равенство нулю опредѣлителя системы, т.-е.

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (29)$$

Это есть результатъ исключенія неизвѣстнаго x изъ двухъ уравненій (25), т.-е. ихъ результантъ въ новой формѣ. Способъ Bézout даетъ результантъ въ формѣ опредѣлителя порядка n.

Примѣръ. Пусть намъ даны два уравненія

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$
$$b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0$$

Результантъ въ формѣ Bézout будетъ:

$$\begin{vmatrix} a_1b_0 - a_0b_1, & a_2b_0 - a_0b_2, & a_3b_0 - a_0b_3 \\ a_2b_0 - a_0b_2, & a_2b_1 - a_1b_2 + a_3b_0, - a_0b_3, & a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_3b_0 - a_0b_3, & a_3b_1 - a_1b_3, & a_3b_2 - a_2b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

9. **Существованіе нѣсколькихъ общихъ корней для уравненій одинаковыхъ степеней.** Если два уравненія (25) имѣютъ g и только g общихъ рѣшеній, то лѣвыя ихъ части—многочлены f и φ будутъ имѣть общаго дѣлителя степени g и только g. Принимая во вниманіе обозначенія (28), мы систему (27) можемъ переписать такъ:

$$\varphi_{i-1}f - f_{i-1}\varphi = A_{i1}x^{n-1} + A_{i2}x^{n-2} + \dots + A_{in} \qquad (27'')$$
$$(i = 1, 2, \dots n)$$

Возьмемъ рядъ какихъ-нибудь индексовъ i_1, i_2, . . . i_{p+1} и соотвѣтствующихъ имъ уравненій:

$$\begin{aligned} \varphi_{i_1-1}f - f_{i_1-1}\varphi &= A_{i_11}x^{n-1} + A_{i_12}x^{n-2} + \dots A_{i_1n} \\ \varphi_{i_2-1}f - f_{i_2-1}\varphi &= A_{i_21}x^{n-1} + A_{i_22}x^{n-2} + \dots A_{i_2n} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{i_{p+1}-1}f - f_{i_{p+1}-1}\varphi &= A_{i_{p+1}1}x^{n-1} + A_{i_{p+1}2}x^{n-2} + \dots A_{i_{p+1}}, \end{aligned} \qquad (30)$$

умножимъ первое уравненіе на c_1, второе на c_2, . . . послѣднее на c_{p+1} и сложимъ почленно. Принимая для краткости:

$$\begin{aligned} c_1\varphi_{i1-1} + c_2\varphi_{i2-1} + \dots + c_{p+1}\varphi_{ip+1-1} &= P \\ c_1 f_{i1-1} + c_2 f_{i2-1} + \dots + c_{p+1}f_{ip+1-1} &= Q \\ c_1 A_{i1k} + c_2 A_{i2k} + \dots + c_{p+1} A_{ip+1k} &= C_k, \end{aligned} \qquad (31)$$

1)

найдемъ:

$$Pf - Q\varphi = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \dots + C_n. \qquad (32)$$

Постоянныя $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ во всякомъ случаѣ можно выбрать (отличными отъ нуля) такъ, чтобы:

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0, \ldots \ldots C_p = 0, \tag{33}$$

ибо эти условія дадутъ намъ p однородныхъ линейныхъ уравненій относительно $p+1$ неизвѣстныхъ $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$. Если f и φ имѣютъ общаго дѣлителя степени $n-p$, то на него же долженъ дѣлиться всякій многочленъ $Pf - Q\varphi$; если теперь постоянныя $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ выбраны такъ, что удовлетворяются условія (33), то $Pf - Q\varphi$ будетъ, какъ показываетъ (32), степени $n-p-1$, слѣдовательно $Pf - Q\varphi$ должно тождественно обратиться въ нуль при значеніяхъ $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ отличныхъ отъ нуля. Итакъ, на ряду съ условіями (33) мы имѣемъ:

$$C_{p+1} = 0,\ C_{p+2} = 0, \ldots \ldots C_n = 0. \tag{34}$$

Система n уравненій (33) и (34) при $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ отличныхъ отъ нуля можетъ удовлетворяться въ томъ лишь случаѣ, когда всѣ опредѣлители порядка $p+1$, составленные изъ коэффиціентовъ A_{ik} этой системы, обращаются въ нули; значки $i_1, i_2, \ldots i_{p+1}$ были выбраны нами произвольно, а потому мы можемъ сказать: если два уравненія $f=0$ и $\varphi=0$ имѣютъ $n-p$ общихъ корней, то всѣ подопредѣлители порядка $p+1$ результанта Bèzout должны обращаться въ нуль, иначе говоря, опредѣлитель Bèzout долженъ имѣть рангъ не выше p.

Положимъ теперь наоборотъ, намъ дано, что рангъ результанта Bèzout (29) равенъ p; тогда опять постоянныя $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ можно опредѣлить такъ, чтобы они, не обращаясь всѣ одновременно въ нуль, удовлетворяли условіямъ (33) и (34). Если при этомъ положить, что $i_1 = 1,\ i_2 = 2, \ldots i_{p+1} = p+1$, то P будетъ степени не выше p, тождество (32) приметъ видъ:

$$Pf - Q\varphi = 0,$$

Pf должно дѣлиться на φ, а потому f и φ должны имѣть общаго дѣлителя степени не ниже $n-p$. Что этотъ дѣлитель при рангѣ p опредѣлителя (29) будетъ непремѣнно степени $n-p$, можно показать слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ опредѣлитель:

$$D_p = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1p-1}, & A_{1p}x^{n-p} + A_{1p+1}x^{n-p-1} + \ldots + A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2p-1}, & A_{2p}x^{n-p} + A_{2p+1}x^{n-p-1} + \ldots + A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{p1}, & A_{p2}, & \ldots, & A_{pp-1}, & A_{pp}x^{n-p} + A_{pp+1}x^{n-p-1} + \ldots + A_{pn} \end{vmatrix} \tag{35}$$

и прибавимъ къ элементамъ послѣдняго столбца элементы перваго, умноженные на x^{n-1}, элементы второго, умноженные на $x^{n-2}, \ldots$ элементы предпослѣдняго, умноженные на x^{n-p+1}, тогда найдемъ на основаніи (27''):

$$D_p = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots & A_{1p-1}, & \varphi_0 f - f_0\varphi \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots & A_{2p-1}, & \varphi_1 f - f_1\varphi \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{p1}, & A_{p2}, & \ldots & A_{pp-1}, & \varphi_{p-1} f - f_{p-1}\varphi \end{vmatrix} \tag{35'}$$

или наконецъ:

$$D_p = P_p f - Q_p \varphi, \qquad (35'')$$

гдѣ принято

$$P_p = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots & A_{1p-1}, & \varphi_0 \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots & A_{2p-1}, & \varphi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{p1}, & A_{p2}, & \ldots & A_{pp-1}, & \varphi_{p-1} \end{vmatrix} \text{ и } Q_p = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots & A_{1p-1}, & f_0 \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots & A_{2p-1}, & f_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{p1}, & A_{p2}, & \ldots & A_{pp-1}, & f_{p-1} \end{vmatrix}$$

Полученное соотношеніе (35″) показываетъ, что всякій общій дѣлитель многочленовъ f и φ долженъ дѣлить многочленъ D_p; общій ихъ дѣлитель не можетъ быть степени выше степени D_p; этотъ же послѣдній будетъ степени $n-p$, если опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots & A_{1p} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots & A_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{p1}, & A_{p2}, & \ldots & A_{pp} \end{vmatrix} \qquad (36)$$

отличенъ отъ нуля. Итакъ, если рангъ результанта Bézout (29) равенъ p, то два данныхъ уравненія имѣютъ $n-p$ и только $n-p$ общихъ (или равныхъ) корней: эти общіе корни будутъ удовлетворять уравненію $D_p = 0$, гдѣ лѣвая часть опредѣляется формулой (35).

10. **Исключеніе неизвѣстнаго способомъ Bézout изъ уравненій различныхъ степеней.** Если данныя уравненія:

$$\begin{aligned} f &\equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \\ \varphi &\equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m = 0 \end{aligned} \qquad (37)$$

будутъ различныхъ степеней (напримѣръ $n > m$), то исключеніе способомъ Bézout даетъ результантъ въ формѣ опредѣлителя порядка равнаго большему изъ чиселъ n и m.

Составимъ опять функціи:

$$\begin{aligned} f_\kappa &= a_0 x^\kappa + a_1 x^{\kappa-1} + \ldots + a_\kappa \\ \varphi_\kappa &= b_0 x^\kappa + b_1 x^{\kappa-1} + \ldots + b_\kappa \end{aligned} \qquad (38)$$

Если уравненія (37) имѣютъ общее рѣшеніе, то тѣмъ же значеніемъ неизвѣстнаго x будутъ удовлетворяться и уравненія.

$$\begin{aligned} f_{n-1}\varphi - \varphi_{m-1} f &= 0 \\ f_{n-2}\varphi - \varphi_{m-2} f &= 0 \\ \ldots\ldots & \\ f_{n-m}\varphi - \varphi_0 f &= 0 \\ x^{n-m-1} \cdot \varphi &= 0 \\ x^{n-m-2} \cdot \varphi &= 0 \\ \ldots\ldots & \\ x\varphi &= 0 \\ \varphi &= 0. \end{aligned} \qquad (39)$$

Нетрудно убѣдиться, что всѣ эти уравненія будутъ степени не выше $n-1$ относительно x, число ихъ n; систему (39) можно такимъ образомъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$A_{i1}x^{n-1}+A_{i2}x^{n-2}+\ldots+A_{in}=0 \qquad (39')$$
$$(i=1,\ 2,\ldots n)$$

Исключая изъ этой линейной системы $n-1$ степеней x $x^2,\ldots x^{n-1}$, мы получимъ, какъ условіе ихъ совмѣстности, равенство нулю опредѣлителя $|A_{ik}|$. Разсужденіемъ подобнымъ тому, которымъ мы пользовались въ простѣйшемъ случаѣ уравненій съ одинаковыми степенями, мы и здѣсь могли бы доказать, что условіе необходимое и достаточное, чтобы уравненія (37) имѣли $n-p$ общихъ корней, это—чтобы опредѣлитель $|A_{ik}|$ былъ ранга p. Это условіе можно представить въ слѣдующей болѣе удобной для приложеній формѣ; назовемъ подопредѣлитель (главный).

$$\begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots & A_{1k} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots & A_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{k1} & A_{k2}, & \ldots & A_{kk} \end{vmatrix}$$

черезъ R_k, такъ что $|A_{ik}|_n=R$; въ такомъ случаѣ R_n будетъ ранга p, если выполняются соотношенія

$$R_n=0,\ R_{n-1}=0,\ \ldots R_{p+1}=0,\ R_p\neq 0 \qquad (40)$$

Такимъ образомъ равенства (40) являются необходимыми и достаточными условіями существованія $n-p$ общихъ рѣшеній для уравненій (38).

Примѣръ. Пусть даны два уравненія

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$
$$b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

Условіе существованія одного общаго корня будетъ:

$$\begin{vmatrix} a_0b_2, & a_1b_2-a_3b_0, & a_2b_2-a_3b_1 \\ a_0b_1, & a_1b_1+a_0b_2-a_2b_0, & a_1b_2-a_3b_0 \\ b_0, & b_1, & b_2 \end{vmatrix}=0$$

Чтобы получить условія существованія двухъ общихъ корней, нужно къ предыдущему условію присоединить еще:

$$\begin{vmatrix} a_0b_2, & a_1b_2-a_3b_0 \\ a_0b_1, & a_1b_1+a_0b_2-a_2b_0 \end{vmatrix}=0$$

11. Элиминантъ. Теорема Bézout о числѣ общихъ рѣшеній двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными. Если намъ даны два уравненія съ двумя неизвѣстными:

$$f(x,y)=0,\ \varphi(x,y)=0, \qquad (41)$$

лѣвыя части которыхъ представляютъ изъ себя цѣлыя раціональныя функціи отъ x и y, т.-е. многочлены, то каждый изъ нихъ

можно расположить по степенямъ одного изъ перемѣнныхъ, напримѣръ x, и привести такимъ образомъ уравненія къ виду (37), гдѣ только коэффиціенты a_i и b_i будутъ уже функціями отъ второго неизвѣстнаго y. Предполагая, что степень перваго уравненія по отношенію къ обоимъ перемѣннымъ равна n, степень второго—m, мы должны считать a_i и b_i за многочлены относительно y степени не выше i (индекса этихъ коэффиціентовъ). Исключая изъ уравненій (41) однимъ изъ указанныхъ выше способовъ перемѣнное x, мы получимъ равенство нулю нѣкоторой функціи отъ a_i и b_i (прежній результантъ), которая теперь будетъ зависѣть отъ y. Результатъ исключенія въ этомъ случаѣ называютъ иногда элиминантомъ. Разсмотримъ какой-нибудь изъ членовъ элиминанта:

$$a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} \ldots\ldots a_{i_m}^{\alpha_m} b_{i_{m+1}}^{\beta_1} b_{i_{m+2}}^{\beta_2} \ldots\ldots b_{i_{m+n}}^{\beta_n}$$

Каждое a_i и b_i, какъ уже отмѣчалось, будетъ многочленомъ относительно y степени не выше i. такимъ образомъ наивысшая степень y, содержащаяся въ предыдущемъ произведеніи равна:

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_m i_m + \beta_1 i_{m+1} + \beta_2 i_{m+2} + \ldots + \beta_n i_{m+n},$$

т.-е. равна вѣсу этого члена результанта. Вѣсъ же результанта, какъ было доказано въ § 7 этой главы, равенъ $m.\ n$. Итакъ степень элиминанта отоосительно неизвѣстнаго y равна цроизведенію степеней данныхъ уравненій. Столько, стало быть, можетъ быть найдено значеній для y, при которыхъ равенство нулю элиминанта выполняется. Каждому значенію y будетъ соотвѣтствовать, вообще говоря, опредѣленное значеніе x. Такимъ образомъ мы можемъ сказать, что число общихъ рѣшеній двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными равно произведенію степеней этихъ уравненій. Это предложеніе носитъ названіе теоремы Bézout.

12. Дискриминантъ. Дискриминантомъ даннаго уравненія называется такая (цѣлая и раціональная) функція его коэффиціентовъ, обращеніе въ нуль которой является необходимымъ и достаточнымъ условіемъ существованія двукратнаго корня уравненія. Въ высшей алгебрѣ доказывается, что если уравненіе имѣетъ два равныхъ корня, то этотъ корень обращаетъ въ нуль производную лѣвой части уравненія, и обратно, если уравненіе

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad , \qquad (42)$$

и уравненіе, полученное дифференцированіемъ по x-у лѣвой его части:

$$f'(x) \equiv n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0 \qquad (43)$$

имѣютъ общее рѣшеніе, то оно будетъ двукратнымъ корнемъ даннаго уравненія (42). Ниже мы дадимъ косвенное доказательство этого предложенія.

Такимъ образомъ дискриминантомъ для уравненія (42) будетъ не результъ двухъ уравненій (42) и (43):

$$D = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots & a_n, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & a_0, & a_1, & \ldots & a_{n-1}, & a_n, & 0, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots & a_0, & & a_1, & \ldots & & a_n \\ na_0, & (n-1)a_1, & \ldots & & 2a_{n-2}, & a_{n-1}, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & na_0, & (n-1)a_1, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots & \ldots & & na_0, & (n-1)a_1, & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix} \qquad (44)$$

Равенство его нулю даетъ условіе существованія двухъ равныхъ корней уравненія. Согласно сказанному выше (§§ 6 и 7) дискриминантъ будетъ однородной и изобарной функціей коэффиціентовъ уравненія: измѣреніе ея равно $2n-1$, а вѣсъ $n(n-1)$.

Пусть корни уравненія (42) будутъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, составимъ произведеніе ихъ разностей попарно:

$$\begin{aligned} P=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4) \ldots (\alpha_1-\alpha_n). \\ (\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4) \ldots (\alpha_2-\alpha_n). \\ (\alpha_3-\alpha_4) \ldots (\alpha_3-\alpha_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_{n-1}-\alpha_n). \end{aligned} \qquad (45).$$

Очевидно, что если два какіе-нибудь корня уравненія равны между собой, то P обращается въ нуль и обратно, если $P=0$, то непремѣнно два какихъ-либо корня равны между собой. Обращеніе въ нуль выраженія P, слѣдовательно, является необходимымъ и достаточнымъ условіемъ того, что данное уравненіе имѣетъ два равныхъ корня. Покажемъ теперь, что дискриминантъ D отличается отъ P^2 только нѣкоторымъ постояннымъ множителемъ. Въ самомъ дѣлѣ на основаніи § 5:

$$D=a_0^{n-1}f'(\alpha_1)f'(\alpha_2) \ldots f'(\alpha_n) \qquad (46).$$

Съ другой стороны такъ какъ:

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_n),$$

то дифференцируя, найдемъ:

$$\begin{aligned} f'(x)=a_0(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4) \ldots (x-\alpha_n)+ \\ +a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4) \ldots (x-\alpha_n)+ \\ +a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4) \ldots (x-\alpha_n)+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

и равенство (46) въ развернутомъ видѣ напишется такъ:

$$\begin{aligned} D=a_0^{2n-1}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4) \ldots (\alpha_1-\alpha_n). \\ (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4) \ldots (\alpha_2-\alpha_n). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3) \ldots (\alpha_n-\alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

или наконецъ:

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-1}P^2 \qquad (47)$$

Полученное соотношеніе показываетъ, что дискриминантъ D обращается въ нуль одновременно съ выраженіемъ P.

Произведеніе разностей корней, т.-е. P можно представить въ видѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots\ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^3 & \ldots\ldots & \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (48).$$

Дѣйствительно этотъ опредѣлитель обращается въ нуль, когда два какихъ-либо корня равны между собой, ибо тогда два столбца опредѣлителя оказываются равными; слѣдовательно, опредѣлитель есть произведеніе всевозможныхъ разностей $\alpha_i-\alpha_k$. Опредѣлитель (48) и выраженіе (45) являются функціями корней однородными и одного и того же измѣренія; нетрудно далѣе убѣдиться, что коэффиціенты и знаки ихъ при равныхъ членахъ одинаковы. Итакъ опредѣлитель (48) равенъ P.

СОДЕРЖАНІЕ

ГЛАВА I.

Опредѣленіе детерминанта.

ГЛАВА II.

Основныя свойства опредѣлителей.

ГЛАВА III.

Адъюнкты и миноры.

ГЛАВА IV.

Теорема Лапласа.

ГЛАВА V.

Перемноженіе опредѣлителей.

ГЛАВА VI.

Опредѣлитель сопряженный данному и его миноры.

ГЛАВА VII.

Понятіе о матрицѣ и ея рангѣ.

§§ *Стр.*

ГЛАВА VIII.

Линейныя уравненія.

ГЛАВА IX.

Особые опредѣлители.

ГЛАВА X.

Исключеніе неизвѣстнаго изъ двухъ уравненій высшихъ степеней.

Книжнымъ Центромъ Отдѣловъ Высшихъ Учебныхъ Заведеній и Научнаго Народнаго Комиссаріата по Просвѣщенію

ПРЕДПОЛОЖЕНЫ КЪ ПЕЧАТИ СЛѢДУЮЩІЯ КНИГИ:

Н. В. Богоявленскій. — Курсъ общей эмбріологіи.

Bosanquet. — Логика или морфологія знаній подъ ред. проф. Шпетъ.

С. С. Бюшгенсъ. — Высшая алгебра.

М. О. Гершензонъ. — Видѣніе поэта.

L. Duguit. — Преобразованіе частнаго права. Подъ ред. А. Г. Гойхбаргъ.

Kassirer. — Проблема познанія. Подъ ред. М. Поливанова.

И. В. Линде. — Курсъ электротехники.

Основы клинической діагностики — подъ редакціей проф. А. М. Левина и Д. Д. Плетнева.

Б. К. Млодзѣевскій. — Основы аналитической геометріи въ пространствѣ.

Haurion. — Принципы публичнаго права. Подъ ред. Д. А. Магеровскаго.

В. К. Поржезинскій. — Краткое пособіе къ лекціямъ по истор. грам. русск. яз.

Д. М. Петрушевскій. — Очерки изъ исторіи средневѣк. Общества и Государства.

Л. С. Розенталь. Микробіологія заразныхъ болѣзней.

М. Н. Резановъ. — Исторія англійской литературы XIX вѣка.

В. В. Стратоновъ. — Курсъ общей астрономіи.

Stout. — Аналитическая психологія. Подъ ред. проф. Г. Г. Шпетъ.

Фалькенбергъ. — Исторія новой философіи. Подъ ред. пр. М. Поливанова.

А. Б. Фохтъ. Лекціи общей патологіи.

А. Б. Фохтъ. — Патологія сердца.

Шершеневичъ. — Общая теорія права. Подъ ред. Д. А. Магеровскаго.
